فصل اول

تبدیل واحدها

فیزیک، علم طبیعت‌شناسی و بررسی دلایل وقوع پدیده‌های طبیعی است. اینکه سیبی که از درخت جدا شده به زمین می‌افتد و چرا بالا نمی‌رود! یا اینکه چرا زمانی که هوای درون دهان خود را به چای داغ فوت(با لب غنچه شده) می‌کنیم سبب سرد شدن چای داغ می‌شود در حالی که اگر هوای درون دهانمان را با دهان باز به دستتان یخ زده‌مان بدمیم موجب گرم شدن دستانمان می‌شود و هزاران پدیده جالب دیگر همگی در حوزه علم فیزیک بررسی می‌شوند. به بیان ساده آنچه چرایی چنین پدیده‌هایی را آشکار می‌سازد قلمرو علم فیزیک است.
نکته:علم فیزیک با وجود پیچیدگی‌های ریاضیاتی و فرمول‌های گوناگون! یک علم تجربی است زیرا علم فیزیک با اندازه‌گیری در آزمایشگاه‌های مختلف سروکار دارد و آنچه را که اندازه می‌گیریم به عنوان کمیت فیزیکی می‌شناسیم. مانند طول، وزن، زمان و ...
به هر کمیتی یک یکا(واحد) نسبت می‌دهیم تا بتوانیم کمیت‌های یکسان با مقادیر متفاوت را برحسب یکاهایشان بسنجیم. به مقدار واحدی از هر کمیت، یکای آن کمیت می‌گوییم. مثلا یکای طول می‌تواند متر، یارد، اینچ، فوت(پا) و یا سال نوری باشد.
نکته:کیلومتر، سانتی‌متر، میلی‌متر و ... نیز می‌توانند یکای طول باشند که از افزودن پیشوندهایی مانند کیلو، سانتی و میلی به یکای در نظر گرفته شده به دست می‌آیند.
برای آنکه اندازه‌گیری کمیت‌های فیزیکی در سرتاسر جهان یکسان باشند لازم است برای هر کمیتی یک استاندارد مشترک داشته باشیم. به عنوان مثال یک وزنه یک کیلوگرمی را می‌توانیم به عنوان استاندارد جرم در نظر بگیریم تا هر کسی بتواند جرم هر جسمی را بر اساس این وزنه تعیین کند. یا می‌توانیم میله‌ای به طول یک متر را به عنوان استاندارد طول انتخاب کنیم و طول‌های مختلف را با آن بسنجیم.
دو شرط اساسی برای تعیین استانداردها باید در نظر گرفته شوند:
۱ – استانداردها باید دسترس‌پذیر باشند(برای هر کس و در هر جایی در دسترس باشند)
۲ –استانداردها باید غیرقابل تغییر باشند(مقدارش تغییر نکند)
اهمیت شرط اول: اگر استاندارد یک کمیت فیزیکی مانند جرم، منحصر به فرد باشد یعنی فقط یک وزنه خاص را به عنوان استاندارد جرم در نظر بگیریم و بخواهیم جرم هر جسمی را بر اساس آن اندازه بگیریم در این صورت لازم است این استاندارد را از جایی به جای دیگر حمل کنیم که این کار مشکلات بسیاری درپی دارد(ممکن است وزنه حین حمل کردن خراب شود، گم شود و ... هم‌چنین اگر بخواهیم جرم دو جسم در دو کشور مختلف را هم‌زمان اندازه بگیریم، امکان‌پذیر نیست). بنابراین برای حل این مشکل وزنه‌های مشابهی را تهیه می‌کنند که در اختیار همه باشد و هر کس بتواند جرم اجسام را بر حسب استاندارد تعیین شده اندازه بگیرد.
اهمیت شرط دوم: فرض کنید جرم آقای انیشتین را به عنوان استاندارد جرم در نظر بگیریم. با توجه به اینکه جرم آقای انیشتین ممکن است در هر لحظه تغییر کند بنابراین نمی‌توانیم جرم یک جسم را به طور مشخص و ثابتی اندازه بگیریم. در این صورت یکای جرم در هر لحظه تغییر می‌کند و باعث می‌شود در محاسبات خود دچار خطا شویم. برای جلوگیری از بروز چنین مشکلاتی در اندازه‌گیری‌ها لازم است استانداردی که انتخاب می‌کنیم ثابت و غیرقابل تغییر باشد.
کمیت‌های اصلی و فرعی: می‌دانیم که در فیزیک بسیاری از کمیت‌ها را می‌توان با اعمال محاسبات ریاضی روی سایر کمیت‌ها به دست آورد. مثلا کمیت سرعت را می‌توانیم از تقسیم کمیت طول بر کمیت زمان به دست آوریم. یا حجم یک مکعب را می‌توان از توان سوم طول یک ضلع آن به دست آورد. پس می‌توانیم سرعت و حجم را به عنوان کمیت‌های فرعی و طول و زمان را به عنوان کمیت‌های اصلی در نظر بگیریم. در واقع کمیت‌های فرعی، کمیت‌هایی هستند که می‌توانیم آن‌ها را از روی کمیت‌های اصلی و از طریق محاسبات ریاضی به دست آوریم.
نکته: انتخاب کمیت‌های اصلی و فرعی، اختیاری(دلخواهی) است. مثلا می‌توانیم سرعت و زمان را به عنوان کمیت‌های اصلی در نظر بگیریم و طول را به عنوان یک کمیت فرعی که از حاصل‌ضرب سرعت در زمان به دست می‌آید در نظر بگیریم. چون

$$[\text{سرعت}] = \frac{[\text{طول}]}{[\text{زمان}]} \Longrightarrow [\text{طول}] = [\text{سرعت}] \times [\text{زمان}]$$

نکته:برای بیان مقیاس‌های خیلی کوچک یا خیلی بزرگ از پیشوندها استفاده می‌کنیم. مثلا شعاع یک اتم که با چشم دیده نمی‌شود و فاصله دورترین سیاره از زمین همگی مقیاس‌های طول هستند و برای نشان دادن آن‌ها بر حسب یکای متر، اعداد خیلی بزرگ یا خیلی کوچک هستند. برای سادگی کار و به کار بردن صفرهای کمتر(و کاهش خطا) از پیشوندهایی مانند میلی، میکرو، کیلو و ... استفاده می‌کنیم.
به طور مثال شعاع اتم هیدروژن حدود /۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۵ متر است که برای راحتی آن را به شکل ۵×۱۰^{-۱۱} متر نشان می‌دهیم که برابر ۵۰ پیکومتر است.
جرم یک ذره گرد و غبار حدود /۷ میکروگرم است که می‌توانیم به شکل ۷×۱۰^{-۷} گرم یا /۰۰۰۰۰۰۷ نیز نمایش دهیم.
نکته: انتخاب پیشوندها نیز اختیاری است. یعنی هر شخصی می‌تواند پیشوندهای دلخواه خود را تعریف کند. از این رو برای هماهنگی بیشتر و یکسانی نتایج حاصل از اندازه‌گیری‌ها فیزیکدانان، مجموعه‌ای از کمیت‌ها را به عنوان کمیت‌های اصلی تعریف کردند و برای هر کدام یکایی مناسب انتخاب کردند. هم‌چنین پیشوندهایی را نیز تعریف کردند تا هر کس در هر کجای دنیا اندازه‌گیری‌هایش را

بر اساس این سیستم انجام دهد. به مجموعه این قراردادها شامل کمیت‌های اصلی، یکاهایشان و پیشوندهایی که فیزیکدانان تعیین کرده‌اند و در جدول‌های زیر آورده‌ایم سیستم بین المللی یکاها(SI) می‌گویند.

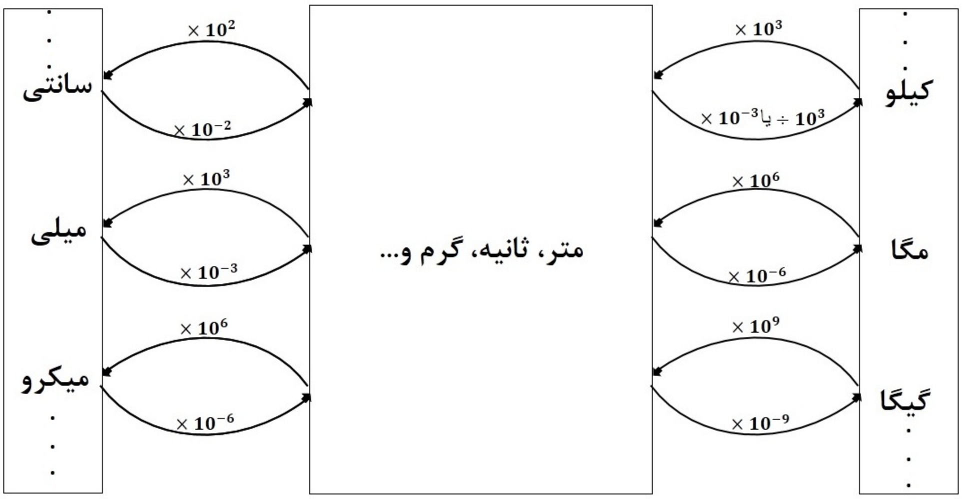
کمیت	یکا	نماد
زمان	ثانیه	s
طول	متر	m
جرم	کیلوگرم	kg
مقدار ماده	مول	mol
دما	کلوین	K
شدت جریان الکتریکی	آمپر	A
شدت نور	کاندلا	cd

جدول ۱: هفت کمیت اصلی دستگاه SI

پیشوند	ضریب	نماد	پیشوند	ضریب	نماد
دسی	$۱۰^{-۱}$	d	دکا	$۱۰^{۱}$	da
سانتی	$۱۰^{-۲}$	c	هکتو	$۱۰^{۲}$	h
میلی	$۱۰^{-۳}$	m	کیلو	$۱۰^{۳}$	k
میکرو	$۱۰^{-۶}$	μ	مگا	$۱۰^{۶}$	M
نانو	$۱۰^{-۹}$	n	گیگا	$۱۰^{۹}$	G
پیکو	$۱۰^{-۱۲}$	p	ترا	$۱۰^{۱۲}$	T
فمتو	$۱۰^{-۱۵}$	f	پتا	$۱۰^{۱۵}$	P

جدول ۲: پیشوندهای توافق شده در دستگاه SI

از این جدول‌ها پیداست که یک کیلوگرم برابر ۱۰۰۰ گرم است، یک کیلومتر برابر ۱۰۰۰ متر است، یک میلی متر برابر ۰٫۰۰۱ متر است، یک مگا پیکسل برابر $۱۰^{۶}$ پیکسل است و ...
قاعده کلی تبدیل واحدها به یکدیگر به شکل زیر است:



شکل ۱: نحوه تبدیل واحدهای SI به یکدیگر

مسئله: شعاع هسته اتم هیدروژن حدود ۲ فمتومتر است. شعاع این هسته چند میلی متر است؟

۲ فمتومتر $= ۲ \times ۱۰^{-۱۵}$ متر

۲×۱۰^{-۱۵} متر $= ۲ \times ۱۰^{-۱۵} \times ۱۰^{۳}$ میلی‌متر $= ۲ \times ۱۰^{-۱۲}$ میلی‌متر

۲ فمتومتر $= ۲ \times ۱۰^{-۱۲}$ میلی‌متر

مسئله: ظرفیت یک هارد دیسک ۴ ترابایت است. ظرفیت این هارد دیسک چند کیلو بایت است؟

۴ ترابایت $= ۴ \times ۱۰^{۱۲}$ بایت

۴×۱۰^{۱۲} بایت $= ۴ \times ۱۰^{۱۲} \times ۱۰^{-۳}$ کیلوبایت $= ۴ \times ۱۰^{۹}$ کیلوبایت

۴ ترابایت $= ۴ \times ۱۰^{۹}$ کیلوبایت

مسئله: ۰/۸۵ مگاولت چند میلی ولت است؟

$$۰/۸۵ \text{ مگاولت } = ۰/۸۵ \times ۱۰^{۶} \text{ ولت } = ۸۵ \times ۱۰^{۴} \text{ ولت}$$
$$۸۵ \times ۱۰^{۴} \text{ ولت } = ۸۵ \times ۱۰^{۴} \times ۱۰^{۳} \text{ میلی ولت } = ۸۵ \times ۱۰^{۷} \text{ میلی ولت}$$
$$۰/۸۵ \text{ مگاولت } = ۸۵ \times ۱۰^{۷} \text{ میلی ولت}$$

نکته: علاوه بر سیستم SI، سیستم‌های دیگری نیز وجود دارد که برخی کشورها از آن‌ها استفاده می‌کنند ولی در ارتباطات بین‌المللی لازم است اندازه‌گیری‌ها را بر حسب سیستم SI بیان کنیم.
مسئله: اگر هر مایل برابر ۱۶۰۹ متر باشد. یک مسیر ۲۵۱ مایلی چند متر و چند کیلومتر است؟

$$۲۵۱ \text{ مایل } = ۲۵۱ \times ۱۶۰۹ \text{ متر } = ۴۰۳۸۵۹ \text{ متر}$$
$$۴۰۳۸۵۹ \text{ متر } = ۴۰۳۸۵۹ \times ۱۰^{-۳} \text{ کیلومتر } = ۴۰۳/۸۵۹ \text{ کیلومتر}$$

مسئله: اگر سرعت یک متحرک ۶۸ مایل بر ساعت باشد. سرعت آن بر حسب متر بر ثانیه چقدر است؟

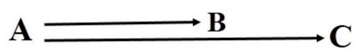
$$۶۸ \left(\frac{\text{مایل}}{\text{ساعت}}\right) = ۶۸ \times \frac{۱۶۰۹}{۳۶۰۰} \left(\frac{\text{متر}}{\text{ثانیه}}\right) = ۳۰/۴۰ \left(\frac{\text{متر}}{\text{ثانیه}}\right) \tag{۱}$$

تمرین:
۱− تفاوت یکا با استاندارد هر کمیت را بیان کنید.
۲− تفاوت جرم هر ماده با وزن آن ماده در چیست؟
۳−سرعت متحرکی ۲۵ کیلومتر بر دقیقه است. این سرعت را بر حسب مایل بر ثانیه بیان کنید.
۴− درون یک فلش مموری با حجم خالص ۳۲ گیگابایت چند قطعه عکس ۱۶۰ کیلوبایتی می‌توان ذخیره کرد؟
۵− ۲۵ میکرومتر مربع چند کیلومتر مربع است؟

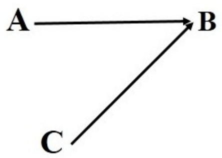
فصل دوم

جبر بردارها

به طور کلی در فیزیک با دو نوع کمیت سروکار داریم. کمیتی مانند جرم که می‌توانیم تنها با یک عدد آن را بیان کنیم، کمیت اسکالر(نرده‌ای، عددی) می‌نامیم. در حالی که برای معرفی برخی دیگر از کمیت‌ها مانند جابه‌جایی از یک نقطه به نقطه دیگر باید علاوه بر عددی که مقدار این جابه‌جایی را مشخص می‌کند، جهت حرکت را نیز مشخص کنیم. چنین کمیت‌هایی را کمیت‌های برداری می‌نامیم. مثلا بردار جابه‌جایی شخصی که مسافت ۲۰ کیلومتر از اصفهان به سمت تهران حرکت می‌کند با شخصی که همین مسافت را از اصفهان به سمت شیراز می‌پیماید متفاوت است. هرچند اندازه بردار جابه‌جایی این دو نفر یکسان است(۲۰ کیلومتر) ولی جهت‌ها متفاوت است.
نکته: نیروها در فیزیک اعم از نیروی گرانشی، نیروی الکترومغناطیسی، نیروی هسته‌ای و ... کمیت‌های برداری هستند زیرا دارای جهت هستند(چون نیروی وارد به اجسام در جهت خاصی وارد می‌شود. مثلا نیروی وزن همواره بر اجسام روی سطح زمین و به سمت مرکز زمین وارد می‌شود). برای نمایش یک بردار علاوه بر اندازه باید جهت آن را نیز مشخص کنیم. از این رو بردارها را با یک پیکان جهت‌دار($\rightarrow$) که طول آن معادل اندازه کمیت برداری مربوطه است(البته با مقیاس مناسب) و راستای بردار، جهت آن را مشخص می‌کند نشان می‌دهیم. به شکل‌های زیر توجه کنید.

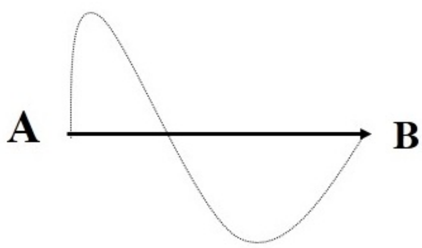


شکل۱- دو بردار هم‌راستا با اندازه‌های متفاوت



شکل۲- دو بردار هم‌اندازه با جهت‌های متفاوت

بردار جابه‌جایی یک متحرک، برداری است که نقطه شروع حرکت را به نقطه پایان حرکت وصل می‌کند و نوک پیکان در جهت نقطه پایانی است. بنابراین بردار جابه‌جایی درباره پیچ و خم‌های احتمالی مسیر حرکت چیزی نمی‌گوید. مثلا در شکل ۲ فرض کنید نقطه A شهر تهران، نقطه B شهر مشهد و نقطه C اصفهان باشند. آن‌گاه $\vec{AB}$ بردار جابه‌جایی متحرکی است که از تهران به سمت مشهد حرکت می‌کند. هرچند ممکن است مسیر واقعی حرکت، مسیر خط‌چین شکل زیر باشد ولی برای نشان دادن بردار جابه‌جایی فقط نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر مهم هستند.



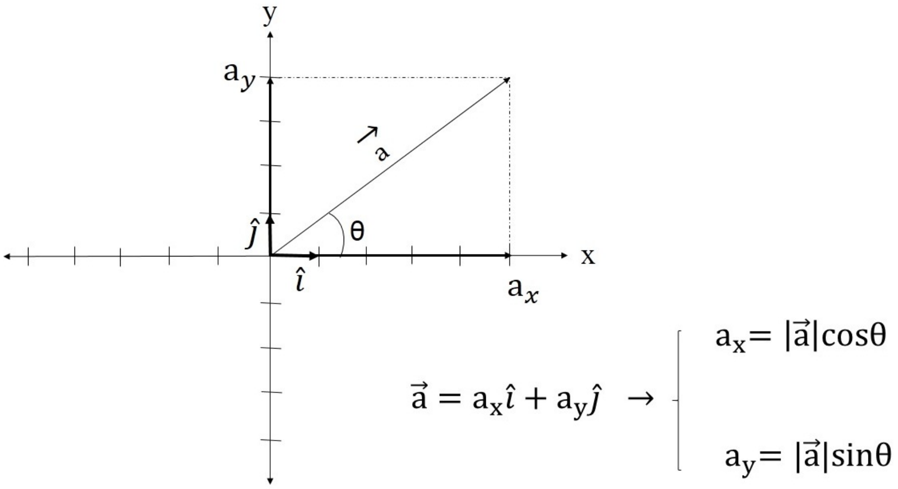
نکته: برای نمایش بردارها از یک حرف لاتین که روی سرش علامت پیکان قرار دارد استفاده می‌کنیم یا می‌توانیم به جای علامت پیکان، حرف مورد نظر را برجسته($bold$) بنویسیم. مثلا بردار جابه‌جایی تهران-مشهد در شکل ۲ را می‌توانیم با $\vec{a}$ یا $\mathbf{a}$ نشان دهیم.اندازه یک بردار مانند بردار $\vec{a}$ را با نماد $|\vec{a}|$ نشان می‌دهیم.
نکته: دو بردار یا دو کمیت برداری وقتی مساویند که اندازه‌هایشان با هم مساوی و در یک جهت باشند. دو بردار مساوی را بردارهای هم‌سنگ نیز می‌نامند.
نکته: به طور قراردادی راستای یک بردار را با زاویه آن بردار با خط افقی که از مبدا بردار می‌گذرد مشخص می‌کنند. بنابراین برای این‌که اطلاعات کافی از یک بردار داشته باشیم لازم است اندازه و زاویه آن نسبت به خط افق را بدانیم.
نکته: قرینه یک بردار، برداری است هم‌اندازه همان بردار ولی در جهت مخالفش. قرینه برداری مانند $\vec{a}$ را با $-\vec{a}$ نشان می‌دهند.

نمایش مولفه‌ای بردارها

در این بخش ابتدا چگونگی نمایش بردارها در دستگاه مختصات و تجزیه آن‌ها را توضیح می‌دهیم و در پایان، کاربردهای این نوع نمایش بردارها را بیان می‌کنیم. در درس ریاضی با دستگاه مختصات که از دو محور عمود برهم تشکیل می‌شود آشنا شدیم. برای نشان دادن بردار در دستگاه مختصات بهتر است ابتدای بردار را روی مبدا مختصات قرار دهیم. راستای هر بردار در دستگاه مختصات را می‌توانیم با زاویه‌ای که آن بردار با محور xها می‌سازد تعیین کنیم. در فیزیک برای ایجاد هماهنگی بیشتر بین نتایج ارائه شده، برای محورهای مختصات بردارهای یکه‌ای را تعریف می‌کنند که طولشان یک است(هم‌ارز یکای کمیت‌های اسکالر). این بردارهای یکه را با $\hat{i}$، $\hat{j}$ و $\hat{k}$ نشان می‌دهیم و برای تعیین جهت هر برداری از آن‌ها استفاده می‌کنیم. بردار یکه در جهت xها برداری با طول واحد است که منطبق بر محور xها است و راستای آن به سمت مثبت محور xها می‌باشد و آن را با $\hat{i}$ یا $\mathbf{i}$ نمایش می‌دهیم. بردار یکه مشابه در جهت مثبت محور yها را با $\hat{j}$ یا $\mathbf{j}$ نمایش می‌دهیم.

نکته: لازم نیست بردارهای یکه از مبدا شروع شوند. این بردارها نیز مانند دیگر بردارها می‌توانند در هر کجای فضای مختصات باشند فقط باید جهتشان تغییر نکند.

اگر برداری مانند $\vec{\mathrm{a}}$ را که ابتدای آن روی مبدا مختصات منطبق شده است در اختیار داشته باشیم به سایه یا تصویر این بردار روی محور xها مولفه عرضی بردار $\vec{\mathrm{a}}$ و به سایه‌ی $\vec{\mathrm{a}}$ روی محور yها مولفه طولی بردار $\vec{\mathrm{a}}$ می‌گویند و به ترتیب با a_x و a_y نمایش می‌دهند. پس هر برداری در دستگاه مختصات دو بعدی دارای دو مولفه است که با دانستن طول و راستای بردار(زاویه آن با محور xها) می‌توانیم بردار را به مولفه‌های سازنده‌اش تجزیه کنیم. برای این کار از نوک بردار به هر کدام از محورهای مختصات، خطی عمود می‌کنیم تا محور را در یک نقطه قطع کند آن‌گاه فاصله این نقطه روی محور تا مبدا مختصات را به عنوان مولفه بردار در راستای آن محور در نظر می‌گیریم[۱]. در شکل زیر بردار دلخواه $\vec{\mathrm{a}}$، مولفه‌های طولی و عرضی آن و بردارهای یکه را نشان داده‌ایم.



به کمک نسبت‌های مثلثاتی و قضیه فیثاغورث در ریاضی می‌توانیم با داشتن مولفه‌های یک بردار، اندازه و جهت آن را به دست آوریم:

$$\begin{cases} |\vec{\mathrm{a}}| = \sqrt{\mathrm{a}_x^{۲} + \mathrm{a}_y^{۲}} \\ tan\theta = \frac{\mathrm{a}_y}{\mathrm{a}_x} \end{cases} \qquad (۱)$$

ربعی که بردار در آن قرار می‌گیرد از روی علامت a_y و a_x تعیین می‌شود

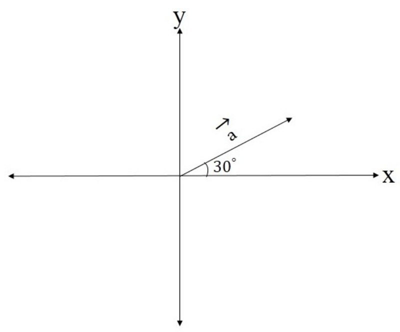
تمرین: در شکل مقابل اگر طول بردار $\vec{\mathrm{a}}$ برابر ۲۰ کیلومتر باشد، مولفه‌های طولی و عرضی این بردار را روی محورهای مختصات نشان دهید و مقدار هر یک را به دست آورید.

نکته: می‌توان بردارهای سه بعدی را نیز در یک دستگاه مختصات سه بعدی رسم کرد. مزیت نمایش مولفه‌ای، در جمع بردارهای سه بعدی و حتی دو بعدی است. زیرا جمع بردارها به روش مولفه‌ای با انتخاب دستگاه مختصات مناسب بسیار ساده‌تر و دارای خطای کمتری است.

جمع بردارها

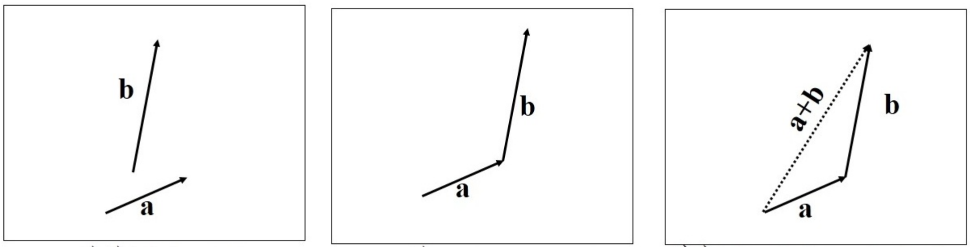
برای جمع دو کمیت اسکالر کافی است مقادیرشان را با یکدیگر جمع کنیم(لازم است کمیت‌ها هم‌بعد یا هم‌جنس باشند. مثلا هر دو کمیت از جنس طول باشند. یعنی نمی‌توان کمیت طول را با کمیت جرم یا زمان با یکدیگر جمع کرد چون هم‌بعد نیستند). ولی جمع دو کمیت برداری مانند سرعت، متفاوت است. در جمع کمیت‌های برداری باید به گونه‌ای عمل کنیم که علاوه بر اندازه، جهت

[۱] هر بردار دلخواه مانند $\vec{\mathrm{a}}$ را با توجه به اینکه انتهایش در کدام ربع دستگاه مختصات قرار دارد به شکل $\vec{\mathrm{a}} = \mathrm{a}_x(\pm\hat{i}) + \mathrm{a}_y(\pm\hat{j})$ نشان می‌دهیم.



بردار حاصل‌جمع(بردار برآیند) را نیز به دست آوریم. دو روش کلی جمع بردارها عبارتند از: روش ترسیمی(نموداری یا هندسی) و روش مولفه‌ای

جمع بردارها به روش ترسیمی: برای جمع دو بردار دلخواه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می‌توانیم از نوک بردار $\vec{a}$ بردار همسنگ(هم‌اندازه و هم‌جهت) بردار $\vec{b}$ را طوری رسم کنیم که ابتدای(دُم) بردار $\vec{b}$ بر نوک بردار $\vec{a}$ منطبق باشد(مرحله ۲ شکل زیر). آن‌گاه برداری که ابتدای(دُم) $\vec{a}$ را به انتهای $\vec{b}$ وصل می‌کند بردار برآیند دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است(بردار خط‌چین در مرحله ۳).

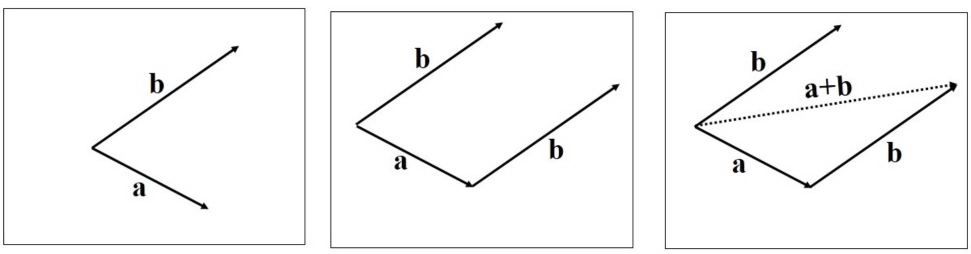


(۱)-دو بردار دلخواه $\vec{a}$ و $\vec{b}$

(۲)-رسم بردار همسنگ بردار $\vec{b}$ از ابتدای بردار $\vec{a}$

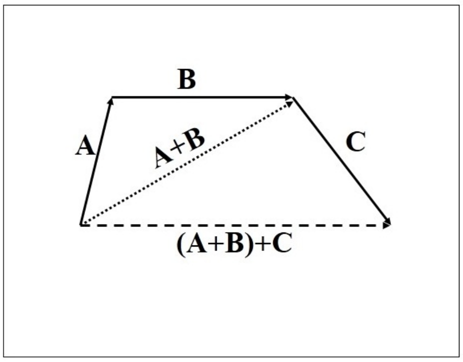
(۳)-بردار خط‌چین، بردار برآیند بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است.

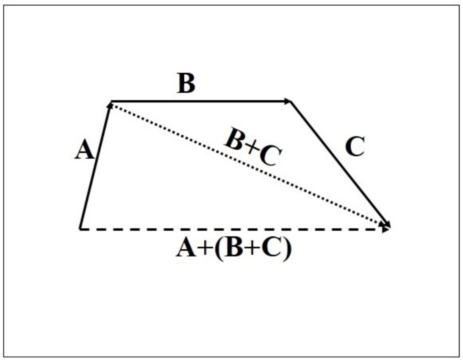
نکته: ممکن است با دو بردار روبرو شویم که ابتدایشان بر یکدیگر منطبق است. در این حالت نیز مانند حالت قبل از انتهای یکی از آن‌ها بردار همسنگ بردار دیگر را رسم می‌کنیم. سپس برداری که ابتدای یکی را به انتهای دیگری وصل می‌کند، بردار برآیند آن دو خواهد بود.



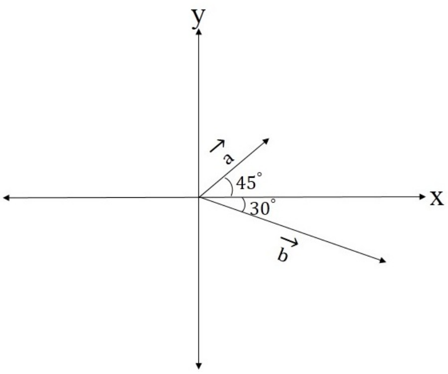
نکته: برای جمع بیش از دو بردار باید روش بالا را تعمیم دهیم. یعنی ابتدا بردار برآیند دو تا از بردارها را به دست آورده و سپس برآیند بردار به دست آمده با بردار بعدی را به دست می‌آوریم و این عمل را تا آخرین بردار تکرار می‌کنیم. ذکر دو نکته در این مورد بسیار مهم است:

۱− ترتیب بردارها در جمع آن‌ها تاثیری ندارد. یعنی اینکه ابتدا کدام دو بردار را با هم جمع کنیم و سپس برآیند آن دو را با بردارهای بعدی به دست آوریم تفاوتی در نتیجه ایجاد نمی‌کند. این قانون به عنوان قانون شرکت‌پذیری بردارها معروف است و بیان ریاضی آن به شکل $\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$ است.





همان‌طور که از این شکل مشاهده می‌کنیم اگر ابتدا برآیند $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و سپس برآیند بردار حاصل، یعنی$\vec{A}+\vec{B}$ با بردار $\vec{C}$ را به دست آوریم نتیجه به دست آمده با اینکه ابتدا $\vec{B}$ را با $\vec{C}$ جمع کنیم و برآیندشان را با $\vec{A}$ به دست آوریم تفاوتی ندارد.
۲− جمع بردارها از قانون جابه‌جایی نیز پیروی می‌کند. یعنی $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$. مثلا در روش ترسیمی برای جمع دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ می‌توانیم $\vec{B}$ را از نوک $\vec{A}$ رسم کنیم. بردار برآیندی که به دست می‌آید با حالتی که $\vec{A}$ را از نوک بردار $\vec{B}$ رسم کنیم مشابه است.
جمع بردارها به روش مولفه‌ای: در این روش ابتدا بردارها را به مولفه‌های سازنده‌شان تجزیه می‌کنیم و سپس مولفه‌های همسان را با یکدیگر جمع می‌کنیم و حاصل را به عنوان آن مولفه از بردار برآیند در نظر می‌گیریم. یعنی اگر $\vec{a}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}$ و $\vec{b}=b_x\hat{i}+b_y\hat{j}$ باشند آن‌گاه $\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x)\hat{i}+(a_y+b_y)\hat{j}$.
مسئله: در شکل زیر اگر $|\vec{a}|=۲m$ و $|\vec{b}|=۴m$ باشد، مولفه‌های بردار برآیند را به دست آورید.



$$\vec{a}=(۲cos۴۵^\circ)\hat{i}+(۲sin۴۵^\circ)\hat{j}=\sqrt{۲}\hat{i}+\sqrt{۲}\hat{j}$$
$$\vec{b}=(۴cos۳۰^\circ)\hat{i}+(۴sin۳۰^\circ)\hat{j}=۲\sqrt{۳}\hat{i}-۲\hat{j}$$
$$\vec{a}+\vec{b}=\underbrace{(\sqrt{۲}+۲\sqrt{۳})}_{\text{مولفه عرضی بردار برآیند}}\hat{i}+\underbrace{(\sqrt{۲}-۲)}_{\text{مولفه طولی بردار برآیند}}\hat{j}$$

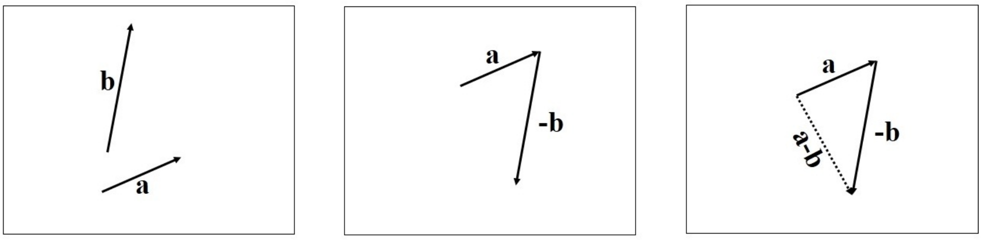
مسئله: برآیند بردار یکه $\hat{i}$ با $-\hat{j}$ را به دست آورید(اندازه و جهت آن را مشخص کنید).
اگر این بردار برآیند را با $\vec{R}$ نشان دهیم آن‌گاه $\vec{R}=\hat{i}-\hat{j}$. با استفاده از روابط (۱) داریم:

$$|\vec{R}|=\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}=\sqrt{۲}$$
$$tan\theta=\frac{R_y}{R_x}=\frac{-۱}{۱}\longrightarrow\theta=\frac{-\pi}{۴}$$

یعنی بردار برآیند با محور افق زاویه ۴۵ درجه می‌سازد و در ربع چهارم دستگاه مختصات قرار دارد.
نکته:رروش مولفه‌ای برای بردارهای سه بعدی از روش ترسیمی مفیدتر است.
نکته: برای تفاضل دو بردار با استفاده از قرینه بردارها داریم:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

یعنی برای به دست آوردن $\vec{a}-\vec{b}$ ابتدا بردار $\vec{a}$ را رسم کرده و سپس از انتهای آن بردار قرینه $\vec{b}$ را طوری رسم می‌کنیم که ابتدای آن بر نوک $\vec{a}$ منطبق باشد. آن‌گاه برداری که ابتدای $\vec{a}$ را به انتهای $(-\vec{b})$ وصل می‌کند بردار $\vec{a}-\vec{b}$ است.



در روش مولفه‌ای نیز داریم:

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_x-b_x)\hat{i}+(a_y-b_y)\hat{j}$$

$$\vec{b}-\vec{a}=(b_x-a_x)\hat{i}+(b_y-a_y)\hat{j}$$

همان طور که مشاهده می‌کنیم در این روش برای تفاضل بردارها باید به ترتیب بردارها دقت کرد در حالی که در جمع بردارها، ترتیب آن‌ها تاثیری ندارد مثلا $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ است ولی $\vec{a}-\vec{b}$ قرینه $\vec{b}-\vec{a}$ است. یعنی $\vec{a}-\vec{b}=-(\vec{b}-\vec{a})$.

ضرب بردارها

ضرب بین بردارها نیز با ضرب بین اسکالرها(اعداد) متفاوت است. در کل سه نوع عمل ضرب در محدوده بردارها وجود دارد:
۱–ضرب یک اسکالر در یک بردار: این نوع ضرب فقط اندازه بردار را تغییر می‌دهد و حاصل‌ضرب نیز یک بردار است. مثلا حاصل‌ضرب اسکالر ۲ در بردار $\vec{a}$ برداری است هم‌جهت با آن که اندازه‌اش دو برابر $\vec{a}$ است چون $۲\vec{a}=\vec{a}+\vec{a}$.
۲–ضرب داخلی(نرده‌ای، اسکالر): طبق قرارداد، ضرب داخلی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را که به صورت $\vec{a}\cdot\vec{b}$ نمایش می‌دهیم برابر است با:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=|\vec{a}|\,|\vec{b}|cos\alpha \qquad (۲)$$

در این رابطه، α زاویه کوچکتر بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است که دُم آن‌ها با یکدیگر می‌سازند[۲]. از آنجا که $|\vec{a}|$ و $|\vec{b}|$ و $cos\alpha$ هر سه کمیت‌هایی اسکالر هستند بنابراین حاصل‌ضرب داخلی دو بردار یک کمیت اسکالر است. از این نوع ضرب برای محاسبه کار در فیزیک استفاده می‌کنیم. کار از حاصل‌ضرب داخلی نیرو در جابه‌جایی‌ای که بر اثر این نیرو انجام شده به دست می‌آید. یعنی $w=\vec{F}\cdot\vec{d}$. می‌بینیم با توجه به اینکه نیرو و جابه‌جایی کمیت‌هایی برداری هستند ولی حاصل‌ضرب داخلی آن‌ها کمیتی اسکالر(کار) است.
مسئله: زاویه بین دو بردار $\vec{a}=\hat{i}-۳\hat{j}$ و $\vec{b}=-۶\hat{i}-۲\hat{j}$ چقدر است؟
با استفاده از رابطه (۲) داریم:

$$cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

بنابراین لازم است $|\vec{a}|$ و $|\vec{b}|$ و $\vec{a}\cdot\vec{b}$ را به دست آوریم.

$$|\vec{a}|=\sqrt{۱^۲+(-۳)^۲}=\sqrt{۱۰} \text{ و } |\vec{b}|=\sqrt{(-۶)^۲+(-۲)^۲}=\sqrt{۴۰} \text{ و}$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-۶)+(-۲)(-۳)=۰\longrightarrow cos\alpha=۰\longrightarrow\alpha=\frac{\pi}{۲}$$

نکته: ضرب داخلی هر بردار در خودش برابر است با توان دوم(مربع) اندازه آن بردار. یعنی $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^۲$. چون زاویه هر برداری با خودش، صفر است و $cos۰^\circ=۱$.
نکته: حاصل‌ضرب داخلی دو بردار عمود بر هم برابر صفر است چون $cos۹۰^\circ=۰$ است. بنابراین اگر بخواهیم نشان دهیم دو بردار بر همدیگر عمود هستند لازم است نشان دهیم که حاصل‌ضرب داخلی آن دو بردار، صفر می‌شود.
نکته: با درک دو نکته اخیر و با توجه به اینکه طول بردارهای یکه برابر یک می‌باشد داریم:

$$\hat{i}\cdot\hat{i}=\hat{j}\cdot\hat{j}=\hat{k}\cdot\hat{k}=۱ \text{ و}$$

$$\hat{i}\cdot\hat{j}=\hat{j}\cdot\hat{k}=\hat{i}\cdot\hat{k}=o$$

[۲] هر دو بردار متقاطع، دو زاویه با یکدیگر می‌سازند.

۳–ضرب خارجی(برداری): بر خلاف ضرب داخلی، حاصل‌ضرب خارجی دو بردار، خود یک بردار است. بر اساس قرارداد پذیرفته شده ضرب خارجی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برداری است مانند $\vec{c}$ که از دترمینان زیر به دست می‌آید:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=(a_yb_z-a_zb_y)\hat{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\hat{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\hat{k}$$

الف: اندازه بردار $\vec{c}$ را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد:

$$|\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|sin\alpha$$

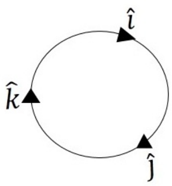
هرچند در حالت کلی اندازه یک بردار سه بعدی(دارای سه مولفه) مانند $\vec{A}$ برابر است با $\sqrt{A_x^۲+A_y^۲+A_z^۲}$.

ب: برای تعیین جهت بردار $\vec{c}$ از قاعده قراردادی دست راست استفاده می‌کنیم. این قاعده برای ضرب خارجی $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ چنین بیان می‌شود: اگر کف دست راست خود را در جهت $\vec{b}$ و چهار انگشت دست راستمان را در جهت $\vec{a}$ قرار دهیم آن‌گاه شست دست راست، جهت بردار $\vec{c}$ را به ما می‌دهد.

نکته: بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ بر هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است[۳].

نکته: ترتیب بردارها در حاصل‌ضرب برداری مهم است و باید به آن توجه کرد. هرچند در ضرب داخلی، ترتیب بردارها مهم نیست. یعنی $\vec{a}\cdot\vec{b}$ با $\vec{b}\cdot\vec{a}$ فرقی ندارد ولی $\vec{a}\times\vec{b}$ با $\vec{b}\times\vec{a}$ متفاوت است. در واقع $\vec{a}\times\vec{b}$ و $\vec{b}\times\vec{a}$ قرینه یکدیگرند(در خلاف جهت یکدیگرند). بنابراین: $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$.

نکته: برای تعیین جهت حاصل‌ضرب خارجی بردارهای یکه در یکدیگر از چرخه زیر استفاده می‌کنیم.



یعنی بردار $\hat{j}\times\hat{i}$ برداری است با طول یک(واحد) در جهت $\hat{k}$. یا بردار $\hat{k}\times\hat{j}$ برداری است واحد در جهت $\hat{i}$ و ... . حال اگر در خلاف جهت این چرخه بچرخیم، در حاصل‌ضرب به دست آمده یک منفی وارد می‌کنیم. به طور مثال بردار $\hat{i}\times\hat{j}$ برداری است به طول واحد و در جهت $-\hat{k}$ و... . بنابراین:

$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}\qquad\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}\qquad\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$$

از طرفی ازآنجا که حاصل‌ضرب خارجی هر بردار در خودش، صفر می‌شود برای بردارهای یکه نیز داریم:

$$\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=۰$$

یکی از کاربردهای ضرب خارجی، به دست آوردن نیروی وارد بر واحد بار الکتریکی است که در یک میدان مغناطیسی در حال حرکت است. این نیرو از حاصل‌ضرب برداری سرعت بار در میدان مغناطیسی به دست می‌آید.

مسئله: اگر $\vec{a}=(۲,-۱,۰)$ و $\vec{b}=(۰,۱,۰)$ باشند بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ و اندازه آن را به دست آورید.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=۰\hat{i}+۰\hat{j}+۲\hat{k}\equiv(۰,۰,۲)$$

برای راحتی خودمان $\vec{a}\times\vec{b}$ را با $\vec{c}$ نشان می‌دهیم. بنابراین اندازه $\vec{c}$ برابر است با:

$$|\vec{c}|=\sqrt{c_x^۲+c_y^۲+c_z^۲}=\sqrt{۰^۲+۰^۲+۲^۲}=۲$$

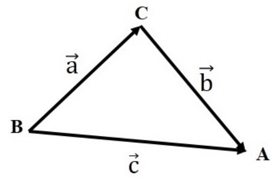
می‌توانیم نشان دهیم که $\vec{c}$ بر هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است چون:[۴]

$$\vec{c}\cdot\vec{a}=c_xa_x+c_ya_y+c_za_z=۰$$
$$\vec{c}\cdot\vec{b}=c_xb_x+c_yb_y+c_zb_z=۰$$

[۳] کافیست حاصل‌ضرب خارجی بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ با $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آوریم که برابر صفر می‌شود

[۴] بار دیگر تاکید می‌کنیم که هر یک از بردارهای دلخواهی که در این فصل انتخاب کردیم می‌توانند معرف یک کمیت برداری اعم از جابه‌جایی، نیرو، سرعت و ... باشد.

قضیه سینوس‌ها و قضیه کسینوس‌ها: با استفاده از نتایج ضرب داخلی و خارجی در یک مثلث دلخواه می‌توان دو قضیه مهم را به دست آورد که در به دست آوردن بردار برآیند دو بردار بسیار مفید هستند. قضیه کسینوس‌ها را از روی شکل زیر به دست می‌آوریم.



مشاهده می‌کنیم که بردار $\vec{c}$ در این مثلث برآیند بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است یعنی $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$. زاویه‌ای که دُم بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با یکدیگر می‌سازند $\pi - C$ است. حال اگر هر طرف این رابطه را در خودش ضرب داخلی کنیم خواهیم داشت[۵]:

$$\vec{c}\cdot\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) \longrightarrow |\vec{c}|^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲+۲|\vec{a}|\,|\vec{b}|cos(\pi-C)=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲-۲|\vec{a}|\,|\vec{b}|cosC$$

هم‌چنین می‌توان طول بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را نیز به دست آورد:

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}\Longrightarrow \begin{cases} \vec{a}=\vec{c}-\vec{b}\longrightarrow |\vec{a}|^۲=|\vec{c}|^۲+|\vec{b}|^۲-۲|\vec{c}|\,|\vec{b}|cosA \\ \vec{b}=\vec{c}-\vec{a}\longrightarrow |\vec{b}|^۲=|\vec{c}|^۲+|\vec{a}|^۲-۲|\vec{c}|\,|\vec{a}|cosB \end{cases}$$

در رسیدن به این روابط توجه به این نکته ضروری است که ضرب داخلی دو بردار با زاویه کوچک‌تر بین دُم آن دو بردار تعریف می‌شود. بنابراین لازم است برای محاسبه $\vec{a}\cdot\vec{b}$، $\vec{a}\cdot\vec{c}$ و $\vec{b}\cdot\vec{c}$ زاویه کوچک‌تر بین دُم بردارها را به عنوان زاویه بین دو بردار در نظر بگیریم.

قضیه سینوس‌ها نیز که از نتایج ضرب خارجی بردارهاست[۶] به شکل زیر بیان می‌شود و در هر مثلث دلخواهی صدق می‌کند:

$$\frac{|\vec{a}|}{sinA}=\frac{|\vec{b}|}{sinB}=\frac{|\vec{c}|}{sinC}$$

تمرین:

۱– اتومبیلی ابتدا مسافت ۱۰۰ کیلومتر را در جهت شرق می‌پیماید و سپس تحت زاویه ۴۵° در جهت جنوب شرقی مسافت ۵۰ کیلومتری را طی می‌کند. جابه‌جایی این اتومبیل چقدر و در کدام جهت بوده است؟

۲– با رسم شکل نشان دهید که $\vec{a}\cdot\vec{b}$ برابر است با حاصل‌ضرب مولفه $\vec{a}$ روی $\vec{b}$ در طول بردار $\vec{b}$.

۳– اگر $\vec{A}=(۱,۱,-۱)$ و $\vec{B}=(۰,-۲,۰)$ و $\vec{C}=(\sqrt{۲},-۱,\sqrt{۲})$ سه بردار در صفحه مختصات باشند کمیت‌های $|\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})|$ و $\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$ را به دست آورید.

۴– اگر حاصل‌ضرب داخلی یک بردار به طول ۴ واحد در برداری به طول ۳ واحد برابر ۶ شود. زاویه بین بردارها چقدر است؟

---

[۵] $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

[۶] مساحت هر متوازی‌الاضلاع که از بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ساخته شده، برابر با $|\vec{A}\times\vec{B}|$ و مساحت مثلث ساخته شده از $\vec{A}$ و $\vec{B}$ نصف این مقدار است.

فصل سوم
حرکت یک بعدی

مکانیک، قدیمی‌ترین شاخه علم فیزیک است و به بررسی حرکت و علل حرکت اجسام می‌پردازد. این شاخه از فیزیک به دو بخش تقسیم می‌شود:

۱ – سینماتیک: بخشی از مکانیک است که به توصیف حرکت اجسام می‌پردازد[1].

۲ – دینامیک: بخشی از مکانیک که دلایل حرکت اجسام را بیان می‌کند.

حرکت در یک بعد یعنی حرکت روی یک خط مستقیم به طوری که مکان متحرک در هر لحظه را بتوانیم با یک عدد از جنس طول بیان کنیم. این عدد فاصله جسم تا یک مبدا اختیاری(دلخواه) است.

ذره: برای بررسی ساده‌تر حرکت اجسام در فیزیک، ابعاد جسم را بسیار کوچک در نظر می‌گیریم به طوری که بتوان جسم را با یک نقطه کوچک(ذره) نمایش داد.

نمودار مکان-زمان جسم: به مسیر حرکت جسم از لحظه شروع در یک دستگاه مختصات که محور افقی آن نماینده زمان‌های مختلف حرکت جسم و محور عمودی آن مکان جسم را نشان می‌دهد نمودار مکان-زمان می‌گویند. معمولا لحظه شروع حرکت را صفر در نظر می‌گیرند($t = ۰$) و نمودار مکان جسم در هر لحظه را توسط تابع $x(t)$ مشخص می‌کنیم. در زیر چند نمونه از پرکاربردترین نوع حرکت اجسام را می‌آوریم:

$x(t) = c$; عددی ثابت استc

این تابع، معادله حرکت جسمی است که دارای حرکت ساکن(ایستا) است. زیرا در هر لحظه، مکان جسم ثابت است و تغییر نمی‌کند یعنی در تمام لحظات، ساکن است و حرکتی ندارد.

$x(t) = at + b$; اعدادی ثابت هستندa, b

این معادله بیانگر حرکت جسمی است که با سرعت ثابت حرکت می‌کند. از مقایسه تابع با نمودار یک خط درمی‌یابیم که جسم روی یک خط راست با شیب b در حرکت است. شیب(سرعت) حرکت می‌تواند مثبت یا منفی باشد[2].

$x(t) = at^۲ + bt + c$; اعدادی ثابت هستندa, b, c

این تابع، معادله حرکت جسمی که دارای شتاب ثابت و سرعت متغیر با زمان است را نشان می‌دهد. ممکن است حرکت یک متحرک، ترکیبی از این نوع حرکت‌ها نیز باشد. مثلا ممکن است متحرکی ابتدا چند ثانیه با سرعت ثابت حرکت کند و سپس سرعتش را با شتاب ثابت افزایش دهد. در بخش‌های بعد نحوه به دست آوردن سرعت و شتاب یک متحرک از روی معادله حرکتش را بیان می‌کنیم.

سرعت متوسط: اگر متحرکی در لحظه $t_۱$ در محل $x_۱$ و در لحظه $t_۲$ در نقطه $x_۲$ باشد آن‌گاه سرعت متوسط این متحرک در طول بازه زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ را که با $\overline{\mathrm{v}}$ نمایش می‌دهیم برابر است با:

$$\overline{\mathrm{v}} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (۱)$$

که در آن Δx جابه‌جایی متحرک است. بنابراین یکای سرعت در دستگاه SI، متر بر ثانیه خواهد بود.

نکته: سرعت یک کمیت برداری است و در جهت بردار جابه‌جایی است که نقطه شروع حرکت را به نقطه پایان حرکت وصل می‌کند.

اگر مکان متحرک یعنی x با گذشت زمان زیاد شود بنابراین $x_۲ > x_۱$ است و سرعت مثبت خواهد بود. در حال که اگر مقدار x با گذشت زمان کمتر شود، سرعت منفی است چون $\Delta x < ۰$ خواهد بود.

مسئله: مسافت مدرسه تا منزل یک دانش‌آموز ۴۲۰ متر است. اگر دانش‌آموز با دوچرخه نیمی از مسیرش را با سرعت $۱۰\frac{km}{h}$ و نیم

[1] در این فصل و فصل بعد به سینماتیک ذرات را معرفی می‌کنیم.

[2] در بخش بعد ثابت می‌کنیم که شیب این تابع همان سرعت حرکت جسم است.

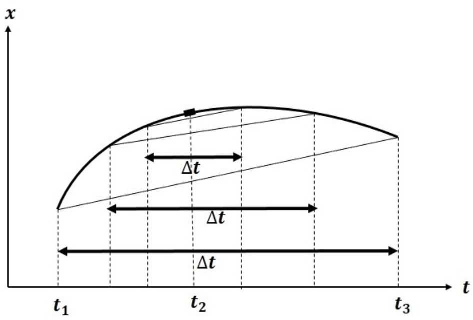
دیگرش را با سرعت $۱۵\frac{km}{h}$ بپیماید مسیر مدرسه تا منزل را در چند ثانیه طی می‌کند؟

$$\overline{\mathrm{v}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Longrightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{\overline{\mathrm{v}}}$$
$$۱۵\frac{km}{h} = ۱۵ \times \frac{۱۰^{۳}}{۳۶۰۰}(\frac{m}{s}) \simeq ۴/۲(\frac{m}{s})\ ;\ ۱۰\frac{km}{h} = ۱۰ \times \frac{۱۰^{۳}}{۳۶۰۰}(\frac{m}{s}) \simeq ۲/۸(\frac{m}{s})$$
$$\text{نیمه اول مسیر}\ \Delta t_{۱} = \frac{۲۱۰}{۲/۸} = ۷۵s$$
$$\text{نیمه دوم مسیر}\ \Delta t_{۲} = \frac{۲۱۰}{۴/۲} = ۵۰s$$
$$\Delta t_{\text{کل}} = \Delta t_{۱} + \Delta t_{۲} = ۱۲۵s$$

مسئله: شخصی با اتومبیل مسافت $۵/۲$ کیلومتر را با سرعت متوسط $۲۶\frac{km}{h}$ می‌پیماید و سپس از اتومبیلش پیاده شده و مسافتی $۱/۲$ کیلومتری را در ۳۰ دقیقه طی می‌کند. سرعت متوسط این شخص در کل مسیر حرکتش چقدر است؟

$$\text{سوار بر اتومبیل}\ \Delta x_{۱} = ۵/۲km;\ \overline{\mathrm{v}}_{۱} = ۲۶\frac{km}{h} \Longrightarrow \Delta t_{۱} = \frac{۵/۲}{۲۶} = /۲h$$
$$\text{پیاده}\ \Delta x_{۲} = ۱/۲km;\ \Delta t_{۲} = ۳۰min = /۵h$$
$$\Delta x_{\text{کل}} = ۱/۲ + ۵/۲ = ۶/۴km$$
$$\Delta t_{\text{کل}} = /۲ + /۵ = /۷h$$
$$\text{سرعت متوسط کل مسیر}\ \overline{\mathrm{v}} = \frac{\Delta x_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}} = \frac{۶/۴}{/۷} \simeq ۹/۱\frac{km}{h} = ۹/۱ \times \frac{۱۰^{۳}}{۳۶۰۰}(\frac{m}{s}) \simeq ۲/۵(\frac{m}{s})$$

سرعت لحظه‌ای: سرعت متوسط، سرعت متحرک در یک بازه زمانی را به ما می‌دهد در حالی که اغلب علاقه‌مندیم سرعت متحرک در یک لحظه خاص را داشته باشیم. برای این کار می‌توانیم بازه زمانی Δt را مرتبا کوچک و کوچک‌تر کنیم. به طور مثال در شکل زیر $\overline{\mathrm{v}}$، سرعت متوسط متحرک در بازه‌ی $t_{۱}$ تا $t_{۳}$ را به دست می‌دهد. حال اگر بخواهیم سرعت در لحظه $t_{۲}$ را به دست آوریم باید بازه زمانی $t_{۳} - t_{۱}$ را کوچک و کوچک‌تر کنیم تا در حوالی لحظه $t_{۲}$ به یک بازه زمانی ناچیز برسیم به طوری که خط معرف Δt در لحظه $t_{۲}$ بر نمودار مماس باشد. آن‌گاه سرعت لحظه‌ای از تقسیم جابه‌جایی متحرک طی این بازه‌ی زمانی ناچیز به دست می‌آید.



برای اینکه مقدار سرعتی که به دست می‌آید دقیق باشد باید Δt خیلی خیلی کوچک باشد تا سرعت واقعی در لحظه $t_{۲}$ را به ما بدهد. یعنی Δt را به سمت صفر میل دهیم. بنابراین سرعت در لحظه $t_{۲}$ را می‌توان از رابطه

$$\mathrm{v}(t) = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

به دست آورد. سمت راست این رابطه همان تعریف مشتق در ریاضی است. یعنی سرعت لحظه‌ای، مشتق تابع مکان نسبت به زمان است.

نکته: از علم ریاضی می‌دانیم که مشتق یک تابع در هر نقطه از آن تابع برابر است با شیب خط مماس بر تابع در آن نقطه. بنابراین اگر نمودار تابع مکان بر حسب زمان یعنی معادله $x(t)$ را داشته باشیم آن‌گاه برای به دست آوردن سرعت در هر لحظه، خطی مماس بر نمودار در آن لحظه رسم می‌کنیم و شیب این خط را به دست می‌آوریم.

شتاب متوسط و لحظه‌ای: اگر سرعت یک متحرک حین حرکتش تغییر کند، متحرک دارای حرکت شتابدار است. به عبارت دیگر

شتاب یعنی آهنگ تغییر سرعت. اگر سرعت متحرکی در لحظه t_1 برابر با v_1 و سرعت در لحظه t_2 برابر با v_2 باشد آن‌گاه شتاب متوسط در بازه زمانی t_1 تا t_2 برابر است با:

$$\overline{a} = \frac{\mathrm{v}_2 - \mathrm{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta t}$$

نکته: جهت بردار شتاب در جهت بردار تفاضل $\mathrm{v}_2 - \mathrm{v}_1$ است و یکای آن در سیستم SI از تقسیم یکای سرعت بر زمان به دست می‌آید که برابر متر بر مجذور ثانیه است. برای به دست آوردن شتاب لحظه‌ای(شتاب متحرک در یک لحظه خاص) همانند آنچه که برای به دست آوردن سرعت لحظه‌ای انجام دادیم با کوچک کردن بازه زمانی Δt، شتاب لحظه‌ای از رابطه

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathrm{v}}{dt}$$

به دست می‌آید. اگر با گذشت زمان، سرعت متحرک افزایش یابد($\Delta \mathrm{v} > 0$) شتاب مثبت و حرکت تندشونده است در حالی که اگر $\Delta \mathrm{v} < 0$ باشد شتاب منفی و حرکت کندشونده است. به عنوان مثال آسانسوری که به طرف بالا حرکت می‌کند را در نظر بگیرید. اگر جهت سرعت رو به بالا را + فرض کنیم این آسانسور دارای شتاب مثبت است اگر سرعتش افزایش یابد و دارای شتاب منفی است اگر ضمن بالا رفتن، سرعتش کاهش یابد. اگر آسانسور به طرف پایین حرکت کند در صورتی دارای شتاب مثبت است که سرعتش کاهش یابد(چون جهت سرعت رو به پایین - است و اگر در جهت منفی، سرعتش کم شود $\Delta \mathrm{v} > 0$ خواهد شد) و اگر سرعتش افزایش یابد دارای شتاب منفی خواهد بود.

نکته: از تعریف مشتق می‌دانیم که اگر نمودار سرعت بر حسب زمان یک متحرک را در اختیار داشته باشیم می‌توانیم شتاب متحرک در هر لحظه را به دست آوریم. برای این کار کافیست در آن لحظه بر نمودار، خطی مماس کنیم و شیب آن را به عنوان مقدار شتاب در آن لحظه در نظر بگیریم.

در بخش اول این فصل سه نوع حرکت را بررسی کردیم. اکنون معادله سرعت و شتاب آن‌ها را با استفاده از مشتق به دست می‌آوریم.

۱−حرکت ساکن: $x(t) = c \Longrightarrow \mathrm{v} = \frac{dx}{dt} = 0 \Longrightarrow a = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = 0$

مشتق چنین معادله حرکتی صفر خواهد شد. بنابراین سرعت متحرکی که معادله حرکتش به این شکل باشد در تمام لحظات برابر صفر است. یعنی متحرک همواره ساکن خواهد بود و چون سرعت متحرک همواره مقدار ثابتی است و تغییر نمی‌کند پس متحرک شتابی ندارد.

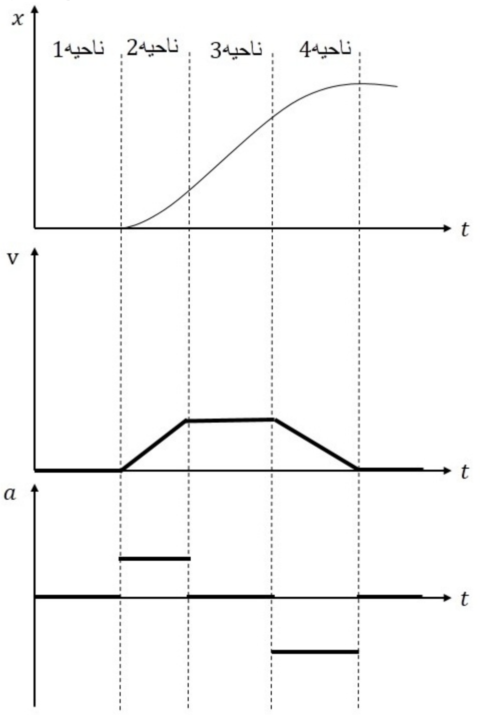
۲−حرکت با سرعت ثابت: $x(t) = at + b \Longrightarrow \mathrm{v}(t) = \frac{dx}{dt} = a \Longrightarrow a(t) = 0$

ملاحظه می‌کنیم که سرعت متحرکی با چنین معادله حرکتی در تمام لحظات مقدار ثابتی است. از این رو شتاب حرکت برابر صفر خواهد بود.

۳−حرکت با شتاب ثابت: $x(t) = at^2 + bt + c \Longrightarrow \mathrm{v}(t) = \frac{dx}{dt} = 2at + b \Longrightarrow a(t) = 2a$

در این حالت چون سرعت بر حسب زمان تغییر می‌کند(سرعت وابسته به زمان است) پس حرکت شتابدار خواهد بود و شتاب آن مقدار ثابت $2a$ است. یعنی شتاب متحرک در هر لحظه مقدار ثابتی است.

مسئله: نمودار مکان−زمان متحرکی در شکل زیر نشان داده‌ایم. نمودارهای سرعت−زمان و شتاب−زمان را به طور کیفی رسم کنید.



در ناحیه اول، متحرک ساکن است. بنابراین سرعت و شتابش صفر خواهد بود. در ناحیه دوم، متحرک شروع به حرکت کرده و شیب نمودار مکان−زمانش رو به افزایش است بنابراین سرعتش در این ناحیه مرتبا افزایش می‌یابد. چون سرعت برابر شیب خط مماس بر نمودار مکان−زمان است. شتاب حرکت در این ناحیه مقدار ثابت مثبتی خواهد بود(چون نمودار سرعت−زمان متحرک با شیب ثابتی افزایش می‌یابد). در ناحیه سوم، متحرک با شیب ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. چون شیب نمودار مکان−زمان در این ناحیه در هر لحظه، ثابت است بنابراین سرعت نیز مقدار ثابتی خواهد بود. سرعت مثبت است چون شیب نمودار مکان−زمان مثبت است. از آنجا که در این ناحیه سرعت مقدار ثابتی دارد و تغییر نمی‌کند بنابراین شتاب حرکت صفر خواهد بود. در ناحیه چهارم شیب نمودار مکان−زمان مرتبا کاهش می‌یابد. در نتیجه نمودار سرعت−زمان با شیب یک نمودار نزولی با شیب منفی خواهد بود و شتاب نیز مقداری ثابت و منفی است.

حرکت با شتاب ثابت: یکی از مهم‌ترین انواع حرکت است که رابطه‌های آن را در این بخش به دست می‌آوریم.اگر لحظه شروع

حرکت را لحظه $t=۰$ و سرعت در لحظه شروع حرکت را با $\mathrm{v}_۰$ نمایش دهیم از رابطه شتاب داریم:

$$a=\frac{\mathrm{v}-\mathrm{v}_۰}{t-۰}\Longrightarrow \boxed{\mathrm{v}=at+\mathrm{v}_۰} \qquad (۲)$$

یعنی به کمک این رابطه می‌توانیم سرعت در همه لحظات بعدی را به دست آوریم. نمودار سرعت-زمان یک حرکت شتابدار به شکل یک خط است با شیب ثابت است. سرعت متوسط متحرکی که دارای چنین مسیر حرکتی است با سرعت لحظه‌ای در نقطه وسط بازه زمانی برابر است. به عبارت دیگر اگر شتاب متحرکی ثابت باشد، سرعت متوسط در یک بازه زمانی برابر است با میانگین سرعت در لحظات ابتدایی و انتهایی بازه زمانی. یعنی:

$$\boxed{\overline{\mathrm{v}}=\frac{۱}{۲}(\mathrm{v}+\mathrm{v}_۰)} \qquad (۳)$$

حال اگر رابطه (۲) را در این رابطه جایگذاری کنیم داریم:

$$\overline{\mathrm{v}}=\mathrm{v}_۰+\frac{۱}{۲}at$$

از طرفی $\overline{\mathrm{v}}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x-x_۰}{t-۰}$. بنابراین:

$$\boxed{\Delta x=x-x_۰=\frac{۱}{۲}at^۲+\mathrm{v}_۰t} \qquad (۴)$$

اگر از رابطه (۲) زمان t را به دست آورده و در رابطه (۴) جایگذاری کنیم داریم:

$$\boxed{\mathrm{v}^۲-\mathrm{v}_۰^۲=۲a(x-x_۰)} \qquad (۵)$$

با استفاده از این روابط می‌توان بسیاری از مسایل فیزیک مکانیک را حل کرد. بار دیگر متذکر می‌شویم که این فرمول‌ها فقط و فقط برای حرکت‌هایی که با شتاب ثابت انجام می‌شوند به کار می‌روند[۳].

مسئله: اتومبیلی با سرعت $۱۰۸\frac{km}{h}$ در حال حرکت است. ناگهان ترمز کرده و ضمن پیمودن مسافت ۳۰۰ متری سرعتش طی یک حرکت با شتاب ثابت به $۳۶\frac{km}{h}$ می‌رسد.

الف) شتاب حرکت چقدر است؟

ب) حرکت شتابدار اتومبیل چقدر طول کشیده است؟

ج) اگر بخواهیم اتومبیل با همین شتاب متوقف شود چه مدت زمان بیشتری باید صرف کنیم و در این مدت اضافی، اتومبیل چه مسافتی را می‌پیماید؟

سرعت در لحظه شروع حرکت شتابدار $\mathrm{v}_۰=۱۰۸\frac{km}{h}=۱۰۸\times\frac{۱۰^۳}{۳۶۰۰}=۳۰\frac{m}{s}$;

سرعت نهایی $\mathrm{v}=۳۶\frac{km}{h}=۱۰\frac{m}{s}$; جابه‌جایی طی حرکت شتابدار $\Delta x=۳۰۰m$; $a=?$

$$\mathrm{v}^۲-\mathrm{v}_۰^۲=۲a\Delta x\Longrightarrow a=\frac{\mathrm{v}^۲-\mathrm{v}_۰^۲}{۲\Delta x}=\frac{(۱۰)^۲-(۳۰)^۲}{۲(۳۰۰)}=-۱/۳\frac{m}{s^۲}$$

شتاب منفی یعنی حرکت کندشونده است.

ب) برای محاسبه t می‌توان از (۲) یا (۴) استفاده کرد.

$$\mathrm{v}=at+\mathrm{v}_۰\Longrightarrow t=\frac{\mathrm{v}-\mathrm{v}_۰}{a}=\frac{۱۰-۳۰}{-۱/۳}=۱۵/۴s$$

ج) در این بخش حرکتی را بررسی می‌کنیم که طی آن متحرک با شتاب ثابت، سرعتش را از $۳۶\frac{km}{h}$ به صفر می‌رساند.

$$\mathrm{v}_۰=۱۰\frac{m}{s}\ ;\ \mathrm{v}=۰\ ;\ a=-۱/۳\frac{m}{s^۲}\ ;\ t=?$$

$\mathrm{v}=at+\mathrm{v}_۰\Longrightarrow t=\frac{\mathrm{v}-\mathrm{v}_۰}{a}=\frac{۰-۱۰}{-۱/۳}=۷/۷s$ مدت زمانی که طی آن سرعت از $۳۶\frac{km}{h}$ به صفر برسد.

[۳] در فصل بعد شکل برداری این روابط را به دست می‌آوریم.

برای به دست آوردن مسافت پیموده شده که طی این تغییر سرعت(از $۳۶\frac{km}{h}$ به صفر) می‌توان از (۴) یا (۵) استفاده کرد.

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^{۲} + \mathrm{v}_{\circ}t = \frac{-۱/۳}{۲}(۷/۷)^{۲} + ۱۰(۷/۷) = -۳۸/۵ + ۷۷ = ۳۸/۵m$$

مسئله: اتومبیلی با شتاب ثابت، مسافت ۶۰ متری بین دو نقطه را در ۵ ثانیه می‌پیماید. سرعت این اتومبیل در لحظه عبور از نقطه دوم $۱۵\frac{m}{s}$ است.

الف) سرعت اتومبیل در نقطه اول چقدر است؟

ب) شتاب اتومبیل چقدر است؟

ج) در چه فاصله‌ای پیش از نقطه اول، اتومبیل در حالت سکون بوده است؟

$$\Delta x = ۶۰m \; ; \qquad \Delta t = ۵s \; ; \qquad \mathrm{v} = ۱۵\frac{m}{s} \qquad \mathrm{v}_{\circ} = ?$$

در حرکت با شتاب ثابت مقدار سرعت متوسط برابر میانگین سرعت لحظه شروع حرکت با سرعت لحظه پایان حرکت است.

با استفاده از روابط (۱) و (۳) داریم:

$$\overline{\mathrm{v}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۱}{۲}(\mathrm{v} + \mathrm{v}_{\circ}) \Longrightarrow \frac{۶۰}{۵} = \frac{۱}{۲}(۱۵ + \mathrm{v}_{\circ}) \Longrightarrow \mathrm{v}_{\circ} = ۹\frac{m}{s}$$ سرعت در نقطه اول

ب) $$\mathrm{v}^{۲} - \mathrm{v}_{\circ}^{۲} = ۲a\Delta x \Longrightarrow a = \frac{\mathrm{v}^{۲} - \mathrm{v}_{\circ}^{۲}}{۲\Delta x} = \frac{(۱۵)^{۲} - (۹)^{۲}}{۲(۶۰)} = ۱/۲\frac{m}{s^{۲}}$$

ج) برای حل این قسمت از لحظه شروع حرکت($t = ۰$) تا زمانی که سرعت اتومبیل به $۹\frac{m}{s}$ می‌رسد را در نظر می‌گیریم.

$$\mathrm{v}_{\circ} = ۰ \; ; \qquad \mathrm{v} = ۹\frac{m}{s} \; ; \qquad a = ۱/۲\frac{m}{s^{۲}} \qquad \Delta x = ?$$

$$\Delta x = \frac{\mathrm{v}^{۲} - \mathrm{v}_{\circ}^{۲}}{۲a} = \frac{۸۱}{۲/۴} = ۳۳/۷m$$

یعنی ۳۳/۷متر را تا قبل از رسیدن به نقطه اول که در آن نقطه سرعتش برابر $۹\frac{m}{s}$ می‌باشد طی کرده است.

سقوط آزاد: یک نمونه از حرکت‌هایی که با شتاب ثابت انجام می‌شود سقوط آزاد اجسام از ارتفاع است. شتاب سقوط برای همه اجسام یکسان است و مقدار آن در نزدیکی سطح زمین برابر $۹/۸\frac{m}{s^{۲}}$ است و با g نمایش داده می‌شود و شتاب گرانش نام دارد. اجسامی که به طرف بالا پرتاب می‌شوند نیز دارای همین شتاب گرانشی هستند. بنابراین مسئله پرتاب اجسام به بالا را نیز در مبحث سقوط آزاد بررسی می‌کنیم. جهت شتاب گرانش همیشه به طرف پایین است(خواه جسم سقوط کند یا پرتاب شود) چون این شتاب عامل نیروی وزن اجسام است. روابط (۲)، (۳)، (۴) و (۵) را می‌توان برای سقوط آزاد نیز به کار برد البته با اعمال این تغییرات:

۱ $-$ تا کنون راستای حرکت را محور افقی x در نظر گرفتیم ولی در سقوط آزاد راستای حرکت را محور قائم y در نظر می‌گیریم. یعنی کافیست x در روابط (۲)، (۴) و (۵) را با y جایگزین کنیم.

۲ $-$ شتاب در سقوط آزاد همواره به سمت پایین است و چون جهت بالای محور yها را + در نظر گرفته‌ایم لازم است a در روابط (۲)، (۴) و (۵) با $-g$ جایگزین گردد. یعنی:

$$\mathrm{v} = \mathrm{v}_{\circ} - gt \tag{۶}$$

$$\Delta y = \frac{-۱}{۲}gt^{۲} + \mathrm{v}_{\circ}t \tag{۷}$$

$$\mathrm{v}^{۲} - \mathrm{v}_{\circ}^{۲} = -۲g\Delta y \tag{۸}$$

مسئله: جسمی را از پشت بام یک ساختمان رها می‌کنیم[۴]. این جسم با سرعت $۲۰\frac{m}{s}$ به زمین برخورد می‌کند. ارتفاع این ساختمان چقدر است؟

اگر سطح زمین را مبدا در نظر بگیریم، ارتفاع ساختمان همان Δy خواهد بود. از طرفی چون ارتفاع نهایی توپ برابر صفر خواهد بود($y = ۰$) بنابراین: $\Delta y = y_{\circ}$.

$$\mathrm{v}_{\circ} = ۰ \; ; \qquad \mathrm{v} = ۲۰\frac{m}{s} \; ; \qquad g = ۹/۸\frac{m}{s^{۲}} \; ; \qquad y = ۰; \qquad y_{\circ} = ?$$

$$\mathrm{v}^{۲} - \mathrm{v}_{\circ}^{۲} = -۲g\Delta y \Longrightarrow \Delta y = y - y_{\circ} = \frac{(۲۰)^{۲} - ۰}{(-۲)(۹/۸)} = -۲۰/۴m \Longrightarrow y_{\circ} = ۲۰/۴m$$

[۴] هرگاه جسمی رها شود یعنی سرعت اولیه یا همان سرعت لحظه شروع حرکتش صفر است.

مسئله: توپی را از زمین با سرعت $۲۰\frac{m}{s}$ در راستای عمودی به بالا پرتاب می‌کنیم. (الف) چه مدت طول می‌کشد تا توپ به نقطه اوج مسیر خود برسد؟ (ب) توپ تا کجا بالا می‌رود؟ (ج) در چه زمان‌هایی توپ در ارتفاع ۱۵ متری سطح زمین قرار دارد؟شتاب گرانش را $۱۰\frac{m}{s^۲}$ در نظر بگیرید.
نقطه اوج نقطه‌ای است که سرعت متحرک در آن نقطه صفر می‌شود و متحرک ساکن است. به کمک رابطه (۶) می‌توانیم مدت زمانی که طول می‌کشد تا توپ به نقطه اوجش برسد را بیابیم.

$$\mathrm{v}_\circ = ۲۰\frac{m}{s}\ ; \qquad \mathrm{v} = ۰\ ; \qquad t = \frac{\mathrm{v}-\mathrm{v}_\circ}{g} = \frac{۲۰-۰}{۱۰} = ۲s$$

ب) برای به دست آوردن ارتفاع اوج یعنی بیشترین مسافتی که متحرک می‌تواند با یک سرعت اولیه رو به بالا حرکت کند(مسافتی که متحرک از لحظه پرتاب تا لحظه رسیدن به نقطه اوجش می‌پیماید) می‌توانیم از رابطه (۸) استفاده کنیم. در این حالت چون توپ از سطح زمین پرتاب شده است و سطح زمین را به عنوان مبدا در نظر گرفته‌ایم بنابراین $y_\circ = ۰$ است یعنی مکان اولیه توپ در لحظه پرتاب، صفر است و y محل نقطه اوج را مشخص می‌کند.

$$\Delta y = y - y_\circ = -\frac{\mathrm{v}^۲ - \mathrm{v}_\circ^۲}{۲g} \Longrightarrow y - ۰ = \frac{\mathrm{v}_\circ^۲ - \mathrm{v}^۲}{۲g} = \frac{(۲۰)^۲ - ۰}{۲(۱۰)} = ۲۰m$$

ج) برای حل این قسمت مکان ثانویه توپ را $y = ۱۵m$ در نظر می‌گیریم. حال می‌خواهیم ببینیم در چه زمان‌هایی پس از پرتاب از سطح زمین($y_\circ = ۰$)، توپ به این ارتفاع رسیده است. به کمک رابطه (۷) داریم:

$$y - y_\circ = \frac{-۱}{۲}gt^۲ + \mathrm{v}_\circ t \Longrightarrow \frac{۱}{۲}gt^۲ - \mathrm{v}_\circ t + y = ۰ \Longrightarrow ۵t^۲ - ۲۰t + ۱۵ = ۰ \Longrightarrow t = ۱s\ ;\ t = ۳s$$

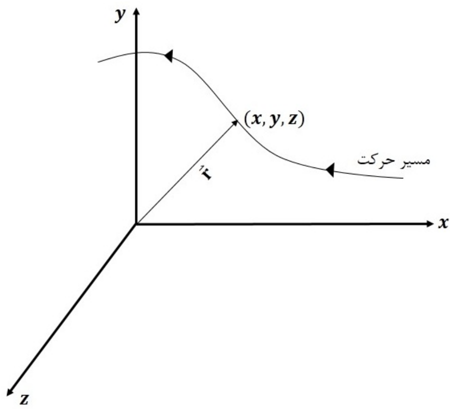
یعنی یک ثانیه پس از پرتاب، ارتفاع توپ از سطح زمین به ۱۵ متر می‌رسد و توپ تا ارتفاع ۲۰ متر بالا رفته و متوقف می‌شود و سپس به سمت پایین سقوط می‌کند و در مسیر رو به پایینش سه ثانیه پس از پرتاب دوباره به ارتفاع ۱۵ متری می‌رسد.

تمرین
۱– اگر قطره‌های باران از ابری در ارتفاع ۱۷۰۰متری به زمین سقوط کنند، سرعت قطره‌ها هنگام برخورد با زمین چقدر خواهد بود؟
۲– اگر معادله حرکت یک متحرک به صورت $x(t) = ۶t^۴ - ۷t^۲ + t - ۱۳$ باشد، سرعت متحرک در ثانیه سوم حرکتش چقدر است؟ شتاب متحرک در ثانیه پنجم حرکتش چقدر خواهد بود؟
۳– اگر متحرکی با شتاب ثابت $۲\frac{m}{s^۲}$ و با سرعت $۲۰\frac{m}{s}$ شروع به حرکت کند. سرعتش پس از طی مسافت ۴۰۰متری چقدر خواهد بود؟
۴– کودکی را در راستای قائم به بالا پرتاب می‌کنیم. اگر کودک با سرعت v از نقطه A و با سرعت $\frac{\mathrm{v}}{۲}$ از نقطه B که ۳متر بالاتر از نقطه A است بگذرد، مقدار v را به دست آورید. ارتفاع اوج کودک نسبت به نقطه B چقدر خواهد بود؟
۵– دو جسم از یک ارتفاع و از حالت سکون به حالت آزاد سقوط می‌کنند. سقوط جسم دوم زمانی آغاز می‌شود که اولی ۱ثانیه از آن جلوتر است. چه مدت پس از شروع سقوط جسم اول، فاصله دو جسم از یکدیگر یک متر خواهد بود؟
۶– متحرکی با سرعت $۲۰\frac{m}{s}$ و شتاب ثابت $۲\frac{m}{s^۲}$ شروع به حرکت می‌کند. پس از گذشت ۳ثانیه از شروع حرکت، این متحرک چقدر جابه‌جا شده است؟

فصل چهارم

حرکت سه بعدی

در فصل قبل حرکت متحرک را فقط در روی یک خط راست بررسی کردیم. در این فصل حرکت در یک دستگاه مختصات سه بعدی را بررسی می‌کنیم. در حرکت سه بعدی، بردار مکان متحرک در هر لحظه، برداری است که مبدا مختصات را به مکان متحرک در آن لحظه وصل می‌کند و دارای سه مولفه در راستای سه محور عمود بر هم(محورهای مختصات) است.



در شکل بالا بردار مکان متحرک را با $\vec{r}$ نمایش داده‌ایم که دارای سه مولفه است و به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

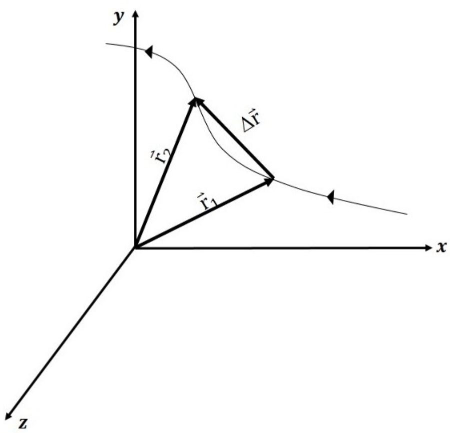
حال اگر متحرکی که در لحظه $t_۱$ در $\vec{r}_۱$ قرار دارد، جابه‌جا شده و در لحظه $t_۲$ به نقطه $\vec{r}_۲$ برسد آن‌گاه جابه‌جایی یا تغییرمکان متحرک(برداری که نقطه شروع حرکت را به نقطه پایان حرکت وصل می‌کند) برابر است با $\Delta\vec{r} = \vec{r}_۲ - \vec{r}_۱$. سرعت متوسط این متحرک در بازه زمانی $\Delta t = t_۲ - t_۱$ برابر است با:

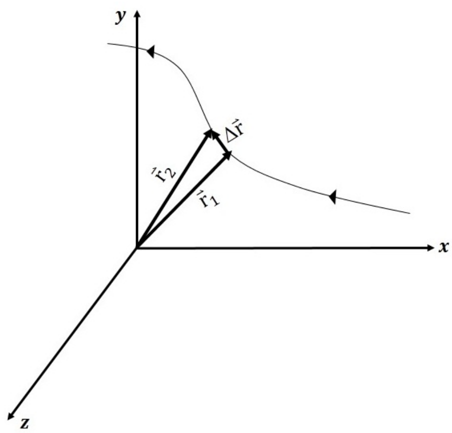
$$\vec{\bar{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

در این رابطه $\vec{\bar{v}}$ یک بردار در جهت $\Delta\vec{r}$ است و Δt کمیتی اسکالر است. اگر بازه زمانی را خیلی کوچک در نظر بگیریم، یعنی $\Delta t \to ۰$ میل کند می‌توانیم سرعت لحظه‌ای در یک لحظه خاص را به دست آوریم.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (۱)$$

با اعمال حد $\Delta t \to ۰$، بردار $\Delta\vec{r}$ بر مسیر متحرک، مماس می‌شود. یعنی سرعت لحظه‌ای در هر لحظه را می‌توان از شیب خط مماس بر مسیر حرکت در آن لحظه به دست آورد.





اگر طرفین رابطه برداری (۱) را به شکل مولفه‌ای در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$\mathrm{v}_x\hat{i}+\mathrm{v}_y\hat{j}+\mathrm{v}_z\hat{k}=\frac{d(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})}{dt}=\frac{dx}{dt}\hat{i}+\frac{dy}{dt}\hat{j}+\frac{dz}{dt}\hat{k}$$
$$\mathrm{v}_x=\frac{dx}{dt}\;;\qquad \mathrm{v}_y=\frac{dy}{dt}\;;\qquad \mathrm{v}_z=\frac{dz}{dt}$$

شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای را نیز می‌توان به شکل زیر به دست آورد:

$$\vec{\bar{a}}=\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}\;;\qquad \vec{a}=\lim_{\Delta t\to ۰}\frac{\Delta\vec{\mathrm{v}}}{\Delta t}=\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}\Longrightarrow a_x=\frac{d\mathrm{v}_x}{dt}\;;\qquad a_y=\frac{d\mathrm{v}_y}{dt}\;;\qquad a_z=\frac{d\mathrm{v}_z}{dt}$$

نکته: چون شتاب از تقسیم تغییرات سرعت بر تغییرات زمان به دست می‌آید و سرعت، کمیتی برداری است که دارای اندازه و جهت می‌باشد بنابراین ممکن است شتاب ناشی از تغییر جهت سرعت باشد. یعنی ممکن است اندازه سرعت متحرکی تغییر نکند ولی حرکت شتابدار داشته باشد. در این صورت شتاب حرکت در اثر تغییر جهت سرعت به وجود آمده است مانند حرکت دایره‌ای یکنواخت.

مسئله: متحرکی در دستگاه مختصات دکارتی به گونه‌ای حرکت می‌کند که معادله حرکت آن عبارت است از:

$$x(t)=t^۳-۴۵t^۲\;;\qquad y(t)=\sin\tfrac{\pi}{۶}t+۴\;;\qquad z(t)=\sqrt{t^۲-۲t}$$

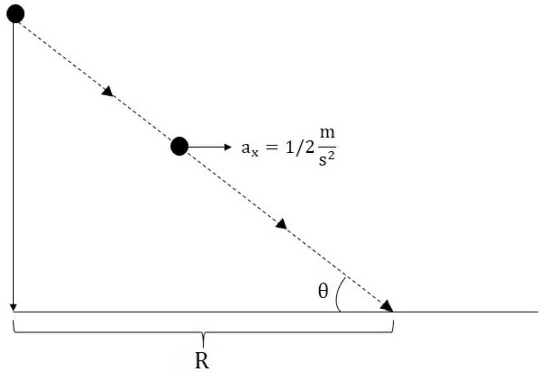
که x و y و z بر حسب متر و t بر حسب ثانیه هستند. بردارهای مکان، سرعت و شتاب متحرک در لحظه $t=۳s$ را به دست آورید.

$$\mathrm{r}(\vec{t})=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}=(t^۳-۴۵t^۲)\hat{i}+(\sin\frac{\pi}{۶}t+۴)\hat{j}+(\sqrt{t^۲-۲t})\hat{k}$$
$$t=۳s\Longrightarrow\vec{\mathrm{r}}=-۳۷۸\hat{i}+۵\hat{j}+\sqrt{۳}\hat{k}$$
$$\vec{\mathrm{v}}=\mathrm{v}_x\hat{i}+\mathrm{v}_y\hat{j}+\mathrm{v}_z\hat{k}\Longrightarrow\begin{cases}\mathrm{v}_x=\frac{dx}{dt}=۳t^۲-۹۰t\\ \mathrm{v}_y=\frac{dy}{dt}=\frac{\pi}{۶}\cos\frac{\pi}{۶}t\\ \mathrm{v}_z=\frac{dz}{dt}=\frac{t-۱}{\sqrt{t^۲-۲t}}\end{cases}\xrightarrow{t=۳s}\quad\vec{\mathrm{v}}=-۲۴۳\hat{i}+\frac{۲}{\sqrt{۳}}\hat{k}$$
$$\vec{a}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k}\Longrightarrow\begin{cases}a_x=\frac{d\mathrm{v}_x}{dt}=۶t-۹۰\\ a_y=\frac{d\mathrm{v}_y}{dt}=-\frac{\pi^۲}{۳۶}\sin\frac{\pi}{۶}t\\ a_z=\frac{d\mathrm{v}_z}{dt}=\frac{\sqrt{t^۲-۲t}-\frac{(t-۱)^۲}{\sqrt{t^۲-۲t}}}{t^۲-۲t}\end{cases}\xrightarrow{t=۳s}\quad\vec{a}=-۷۲\hat{i}-\frac{\pi^۲}{۳۶}\hat{j}+\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}\hat{k}$$

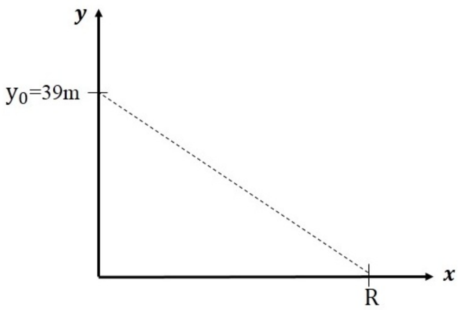
حرکت سه بعدی با شتاب ثابت: در فصل قبل، حرکت با شتاب ثابت را در یک بعد بررسی کردیم و معادلات آن را به دست آوردیم. برای حالت سه بعدی کافیست روابط (۲)، (۳)، (۴) و (۵) در فصل قبل را به شکل برداری بنویسیم. یعنی:

$$\vec{\bar{\mathrm{v}}}=\frac{۱}{۲}(\vec{\mathrm{v}}+\vec{\mathrm{v}}_۰)\tag{۲}$$
$$\vec{\mathrm{v}}=\vec{a}t+\vec{\mathrm{v}}_۰\tag{۳}$$
$$\Delta\vec{\mathrm{r}}=\frac{۱}{۲}\vec{a}t^۲+\vec{\mathrm{v}}_۰t\tag{۴}$$
$$\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\mathrm{v}}-\vec{\mathrm{v}}_۰\cdot\vec{\mathrm{v}}_۰=۲\vec{a}\cdot\Delta\vec{\mathrm{r}}\Longrightarrow\mathrm{v}^۲-\mathrm{v}_۰^۲=۲\vec{a}\cdot\Delta\vec{\mathrm{r}}\tag{۵}$$

نکته: هر کدام از این معادلات برداری را می‌توان به سه مولفه تجزیه کرد و فرم مولفه‌ای آن‌ها را به دست آورد.



مسئله: توپی از ارتفاع ۳۹ متری رها می‌شود. همزمان با رها شدن توپ، باد افقی با شتاب $۱/۲\frac{m}{s^۲}$ می‌وزد. در این صورت حرکت توپ به شکل خط‌چین شکل زیر خواهد بود. (الف) چه مدت طول می‌کشد تا توپ به زمین برسد؟ (ب) در شکل زیر مقادیر R و θ را بیابید. (ج) سرعت توپ در لحظه رسیدن به زمین چقدر است؟



اگر دستگاه مختصات را به شکل مقابل انتخاب کنیم حل مسئله ساده‌تر خواهد شد. در هر لحظه از حرکت توپ، شتاب افقی برابر $a_x = ۱/۲\frac{m}{s^۲}$ و شتاب در راستای عمودی برابر $a_y = g = ۹/۸\frac{m}{s^۲}$ است. یعنی $\vec{a} = ۱/۲\hat{i} - ۹/۸\hat{j}$.

$$\mathrm{v}_{\circ x} = \mathrm{v}_{\circ y} = \circ \; ; \qquad x_\circ = \circ \; ; \qquad y_\circ = ۳۹m$$

$$\begin{array}{l} \Delta x = x - x_\circ = \frac{۱}{۲}a_x t^۲ + \mathrm{v}_{\circ x}t \\ \\ \Delta y = y - y_\circ = \frac{۱}{۲}a_y t^۲ + \mathrm{v}_{\circ y}t \end{array} \Longrightarrow \begin{cases} x = /۶t^۲ \\ \\ y = -۴/۹t^۲ + ۳۹ \end{cases} \tag{۶}$$

(الف) مدت زمانی که طول می‌کشد تا توپ به زمین برسد برابر است با زمانی که توپ از ارتفاع ۳۹متری به زمین می‌رسد. یعنی از رابطه (۶) داریم:

$$\circ = -۴/۹t^۲ + ۳۹ \Longrightarrow t = \sqrt{\frac{۳۹}{۴/۹}} = ۲/۸s$$

(ب) برای یافتن R لازم است در معادله (۶)، مقدار t را برابر ۲/۸ قرار داده و x در لحظه برخورد را به دست آوریم:

$$t = ۲/۸s \Longrightarrow x = R = /۶(۲/۸)^۲ = ۴/۸m$$

$$\tan\theta = \frac{\Delta y}{R} = \frac{۳۹}{۴/۸} = ۸/۲ \Longrightarrow \theta = ۸۳^\circ$$

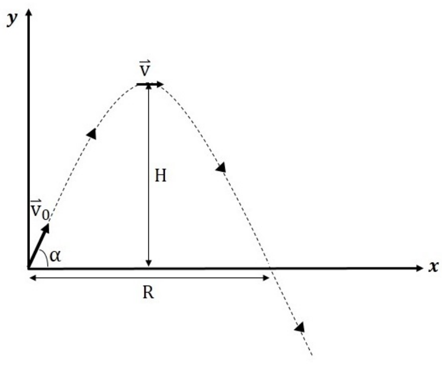
(ج) مطابق شکل در لحظه برخورد، سرعت توپ دارای دو مولفه خواهد بود:

$$\begin{array}{l} \mathrm{v}_x = a_x t + \mathrm{v}_{\circ X} \\ \\ \mathrm{v}_y = a_y t + \mathrm{v}_{\circ y} \end{array} \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{v}_x = ۱/۲t \\ \\ \mathrm{v}_y = -۹/۸t \end{cases} \xrightarrow{t=۲/۸s} \begin{cases} \mathrm{v}_x = ۳/۳۶\frac{m}{s} \\ \\ \mathrm{v}_y = -۲۷/۴۴\frac{m}{s} \end{cases} \Longrightarrow \vec{\mathrm{v}} = ۳/۳۶\hat{i} - ۲۷/۴۴\hat{j}$$

اندازه سرعت در لحظه برخورد برابر است با:

$$|\vec{\mathrm{v}}| = \sqrt{(۳/۳۶)^۲ + (-۲۷/۴۴)^۲} \simeq ۲۷/۶۴\frac{m}{s}$$

حرکت پرتابی: اگر جسمی با سرعت اولیه $\vec{\mathrm{v}}_\circ$ تحت زاویه α نسبت به محور افقی به طرف بالا پرتاب شود جسم تا ارتفاع معینی بالا رفته و سپس سقوط می‌کند. چنین حرکتی را حرکت پرتابی می‌نامند[1].



شکل ۱: مسیر حرکت یک پرتابه

[1] حرکت سقوط آزاد که در فصل قبل بررسی شد نوعی حرکت پرتابی است که سرعت اولیه در راستای قائم است و مولفه افقی ندارد.

در تمام لحظات حرکت، شتاب جسم مقدار ثابت g است. این شتاب فقط دارای مولفه قائم است چون ناشی از نیروی وزن جسم است که به سمت مرکز کره زمین می‌باشد. بنابراین در حرکت پرتابی، شتاب در راستای افقی، صفر است. جسمی که پرتاب شده را پرتابه و بیشترین ارتفاعی که پرتابه بالا می‌رود را ارتفاع اوج می‌نامند و با H نشان می‌دهند. در ارتفاع اوج، سرعت پرتابه فقط دارای مولفه افقی است. مسافت افقی پیموده شده از نقطه پرتاب تا لحظه‌ای که پرتابه مجددا به آن سطح برسد را برد پرتابه می‌نامند و با R نشان می‌دهند. معادلات حرکت پرتابه عبارتند از:

$$\mathrm{v}_{\circ x} = \mathrm{v}_\circ \cos\alpha\ ; \qquad \mathrm{v}_{\circ y} = \mathrm{v}_\circ \sin\alpha$$
$$a_{\circ x} = \circ\ ; \qquad a_{\circ y} = a_y = -g = -۹/۸\frac{m}{s^۲}$$

$$\mathrm{v}_x = a_x t + \mathrm{v}_{\circ x} = \mathrm{v}_\circ \cos\alpha \quad \text{مولفه افقی سرعت پرتابه در هر لحظه} \tag{۷}$$
$$\mathrm{v}_y = a_y t + \mathrm{v}_{\circ y} = \mathrm{v}_\circ \sin\alpha - gt \quad \text{مولفه عمودی سرعت پرتابه در هر لحظه} \tag{۸}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{v}_x^۲ + \mathrm{v}_y^۲} \quad \text{اندازه سرعت پرتابه در هر لحظه} & (\text{۹آ}) \\ \tan\alpha = \dfrac{\mathrm{v}_y}{\mathrm{v}_x} \quad \text{زاویه بردار سرعت با محور افقی در هر لحظه} & (\text{۹ب}) \end{cases}$$

$$x = x_\circ + \frac{۱}{۲}a_x t^۲ + \mathrm{v}_{\circ x} t = \mathrm{v}_\circ \cos\alpha t \tag{۱۰}$$
$$y = y_\circ + \frac{۱}{۲}a_y t^۲ + \mathrm{v}_{\circ y} t = -\frac{۱}{۲}g t^۲ + \mathrm{v}_\circ \sin\alpha t \tag{۱۱}$$

اگر t را از رابطه (۱۰) به دست آورده و در (۱۱) قرار دهیم معادله مسیر پرتابه(که مختصات هر نقطه از مسیر خط‌چین شکل (۱) را برحسب x و y بیان می‌کند) به دست خواهد آمد:

$$y = x\tan\alpha - \frac{۱}{۲}g\left(\frac{x}{\mathrm{v}_\circ \cos\alpha}\right)^۲ \tag{۱۲}$$

اگر در رابطه (۱۲)، مقدار y را برابر صفر قرار دهیم، xی که به دست می‌آید برد پرتابه خواهد بود:

$$R = \frac{۲\mathrm{v}_\circ^۲ \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{\mathrm{v}_\circ^۲ \sin ۲\alpha}{g} \tag{۱۳}$$

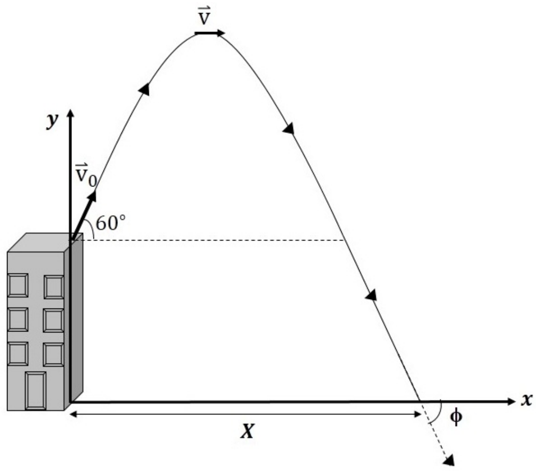
برای به دست آوردن ارتفاع اوج، ابتدا باید زمانی که پرتابه به نقطه اوجش می‌رسد را تعیین کنیم. یعنی زمانی که مولفه قائم سرعت برابر صفر می‌شود. بنابراین باید در رابطه (۸)، قرار دهیم $\mathrm{v}_y = \circ$ و t را به دست آوریم. زمان به دست آمده را زمان اوج می‌نامند و با T نشان می‌دهند. زمان اوج، نصف کل زمانی است که پرتابه از لحظه پرتاب تا لحظه بازگشت به نقطه‌ای در همان سطح در هواست.

$$T = t_{\text{اوج}} = \frac{\mathrm{v}_\circ \sin\alpha}{g} \tag{۱۴}$$

حال این زمان به دست آمده را در (۱۱) قرار می‌دهیم و ارتفاع اوج را به دست می‌آوریم.

$$H = \Delta y_{\text{اوج}} = (\mathrm{v}_\circ \sin\alpha)\frac{\mathrm{v}_\circ \sin\alpha}{g} - \frac{۱}{۲}g\left(\frac{\mathrm{v}_\circ \sin\alpha}{g}\right)^۲ = \frac{(\mathrm{v}_\circ \sin\alpha)^۲}{۲g} \tag{۱۵}$$

نکته: می‌دانیم بیشترین مقدار سینوس هر زاویه‌ای برابر یک است که به ازای زاویه ۹۰درجه به دست می‌آید. بنابراین از رابطه (۱۳) درمی‌یابیم که بیشترین مقدار برد هر پرتابه به ازای زاویه پرتاب $\alpha = ۴۵^\circ$ به دست می‌آید.



مسئله: از لبه پشت‌بام ساختمانی به ارتفاع ۲۵متر پرتابه‌ای با زاویه ۶۰درجه نسبت به افق با سرعت $۹\frac{m}{s}$ را به بالا پرتاب می‌کنیم. (الف) پرتابه در چه فاصله افقی از پای ساختمان فرود می‌آید؟ (ب) بیشترین ارتفاع توپ از سطح زمین چقدر خواهد بود؟ (ج) چند ثانیه پس از پرتاب، پرتابه به زمین می‌رسد؟ (د) سرعت پرتابه در لحظه برخورد به زمین چقدر است؟ (ه) پرتابه با چه زاویه‌ای به زمین برخورد می‌کند؟

(الف) اگر دستگاه مختصات را به شکل روبرو انتخاب کنیم، درواقع مسئله از ما مقدار X را خواسته است. برای به دست آوردن X با استفاده از معادله مسیر پرتابه (۱۲) مختصات نقطه برخورد پرتابه به زمین را می‌یابیم. در نقطه برخورد داریم:

$$y = ۰ \Longrightarrow ۰ = X \tan ۶۰ - ۴/۹(\frac{X}{۹ \times \cos ۶۰})^۲ \Longrightarrow X \simeq ۷m$$

(ب) ارتفاع اوج پرتابه نسبت به پشت بام ساختمان از رابطه (۱۵) به دست می‌آید و مقدار آن برابر است با $H = \frac{(۹\times \sin ۶۰)^۲}{۲g} \simeq ۳/۱m$. بنابراین بیشترین ارتفاع پرتابه از سطح زمین برابر است با: $۲۵ + ۳/۱ = ۲۸/۱m$

(ج) می‌دانیم که زمان اوج پرتابه درواقع نصف کل زمان معلق بودن پرتابه در هوا از لحظه پرتاب تا لحظه بازگشت به لبه پشت‌بام است. این پرتابه پس از بازگشت به لبه پشت‌بام مسافت عمودی ۲۵ متری را نیز طی می‌کند(مقدار این زمان از رابطه (۱۱) به دست می‌آید). بنابراین از رابطه (۱۱) داریم:

$$y = ۰ \;; \quad y_۰ = ۲۵m \Longrightarrow ۴/۹t^۲ - ۷/۶t - ۲۵ = ۰ \Longrightarrow t \simeq ۳/۲s \;; \quad T = \frac{۹ \sin ۶۰}{g} \simeq /۸s$$

$$t_{\text{کل زمانی که پرتابه در هواست}} \simeq ۳/۲ + (۲ \times /۸) = ۴/۸s$$

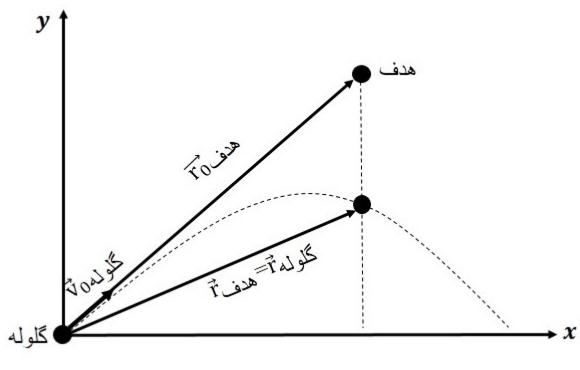
(د) در این بخش به کمک روابط (۷) و (۸) مولفه‌های افقی و قائم سرعت در لحظه برخورد یعنی در لحظه $t = ۴/۸s$ را به دست می‌آوریم:

$$\mathrm{v}_x = ۴/۵\frac{m}{s} \;; \qquad \mathrm{v}_y = -۳۹/۲\frac{m}{s} \Longrightarrow |\vec{\mathrm{v}}| = \sqrt{۴/۵^۲ + (-۳۹/۲)^۲} = ۳۹/۴\frac{m}{s}$$

(ه)اگر زاویه برخورد پرتابه با زمین را ϕ در نظر بگیریم داریم:

$$\tan \phi = \frac{\mathrm{v}_y}{\mathrm{v}_x} = \frac{-۳۹/۲}{۴/۵} \Longrightarrow \phi = ۸۳/۴^\circ$$

زدن هدف در حال سقوط: در این بخش چگونگی برخورد پرتابه به یک هدف در حال سقوط را بررسی می‌کنیم.فرض کنید جسمی از ارتفاع معینی سقوط کند و همزمان با آن تفنگی که در مبدا مختصات قرار دارد به سمت هدف شلیک کند. می‌خواهیم ببینیم تحت چه شرایطی گلوله تفنگ به هدف برخورد خواهد کرد؟ چون هدف در راستای قائم سقوط می‌کند بنابراین سرعت و شتابش مولفه افقی ندارند. ولی گلوله دارای حرکت پرتابی است چون با زاویه نسبت به سطح افقی شلیک شده است(سرعت اولیه دارای مولفه افقی هم هست).



فرض می‌کنیم در لحظه t گلوله به هدف برخورد می‌کند. در این شرایط بردار مکان هدف برابر است با[۲]:

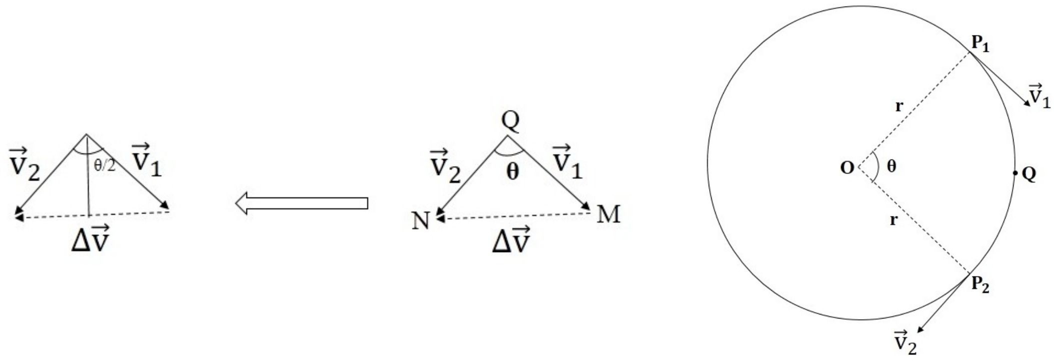
$$\vec{r}_{\text{هدف}} = \vec{r}_{0} - \frac{1}{2}gt^{2}$$

که در آن $\vec{r}_{0}$ بردار مکان اولیه هدف نسبت به مبدا مختصات است. در همین لحظه‌ی t، بردار مکان گلوله برابر است با[۳]:

$$\vec{r}_{\text{گلوله}} = \vec{v}_{0\,\text{گلوله}}t - \frac{1}{2}gt^{2}$$

برای برخورد این دو به یکدیگر باید بردار مکان هر دو در لحظه برخورد برابر باشد(یعنی هر دو در لحظه برخورد در یک نقطه از دستگاه مختصات قرار دارند). بنابراین باید در لحظه برخورد $\vec{r}_{\text{گلوله}} = \vec{r}_{\text{هدف}}$ باشد. در نتیجه اگر شرط $\vec{v}_{0\,\text{گلوله}}t = \vec{r}_{0\,\text{هدف}}$ برقرار باشد گلوله به هدف برخورد می‌کند. از تعریف سرعت می‌دانیم که به لحاظ اندازه این رابطه همواره برقرار است یعنی($|\vec{v}_{0\,\text{گلوله}}|t = |\vec{r}_{0\,\text{هدف}}|$) است. از این رو برای برخورد کافی است که $\vec{v}_{0\,\text{گلوله}}$ در جهت $\vec{r}_{0\,\text{هدف}}$ باشد. اندازه سرعت اولیه گلوله اهمیتی در برخورد ندارد چون اگر $\vec{v}_{0\,\text{گلوله}}$ کم باشد برخورد دیرتر اتفاق می‌افتد و اگر زیاد باشد زودتر اتفاق می‌افتد. یعنی اگر گلوله را به سمت هدفی نشانه‌گیری کنیم و هم‌زمان با شلیک گلوله، هدف سقوط کند تحت هر شرایطی گلوله به هدف برخورد می‌کند.

حرکت دایره‌ای یکنواخت: در ابتدای این فصل اشاره کردیم که گاهی ممکن است اندازه سرعت ثابت باشد ولی جهت آن تغییر کند. در نتیجه حرکت شتابدار خواهد بود یعنی تغییر جهت سرعت سبب ایجاد شتاب خواهد شد. حرکت با سرعت ثابت روی یک دایره نوعی از این گونه حرکت است که اندازه سرعت ثابت است ولی جهت آن مدام تغییر می‌کند. به چنین حرکتی مانند حرکت ماهواره‌ها به دور زمین، حرکت صفحه گرامافون و دیسک کامپیوتر را حرکت دایره‌ای یکنواخت می‌نامند.



(ب) (آ)

شکل ۲: حرکت دایره‌ای یکنواخت

مطابق شکل اگر متحرکی در لحظه t_1 در نقطه P_1 و در لحظه t_2 در نقطه P_2 باشد آن‌گاه جابه‌جایی متحرک در بازه زمانی $\Delta t = t_2 - t_1$ همان طول کمان P_1P_2 است که برابر است با[۴]:

$$\Delta x = \widehat{P_1P_2} = r\theta \qquad \xrightarrow{\Delta x = \mathrm{v}\Delta t} \qquad r\theta = \mathrm{v}\Delta t \tag{۱۶}$$

حال اگر بردارهای $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ را از یک نقطه رسم کنیم(با همان اندازه و جهت موجود در شکل ۲.آ) می‌توانیم بردار $\Delta\vec{v}$ را به دست آوریم. اگر بردارهای $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ را از نقطه‌ای در وسط قوس P_1P_2 رسم کنیم، مشاهده می‌کنیم که جهت $\Delta\vec{v}$ به سمت مرکز دایره است. در شکل (۲.ب) مثلث‌های NQM و P_1OP_2 متشابه هستند. بنابراین اگر نیمساز زاویه بین $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ را رسم کنیم داریم:

$$\frac{1}{2}\Delta\mathrm{v} = \mathrm{v}\sin(\frac{\theta}{2}) \tag{۱۷}$$

به کمک روابط (۱۶) و (۱۷) می‌توانیم شتاب حرکت دایره‌ای را به دست آوریم:

$$\bar{\mathrm{a}} = \frac{\Delta\mathrm{v}}{\Delta t} = \frac{2\mathrm{v}\sin(\frac{\theta}{2})}{r\frac{\theta}{\mathrm{v}}} \tag{۱۸}$$

---

[۲] هدف بدون سرعت اولیه، سقوط می‌کند.

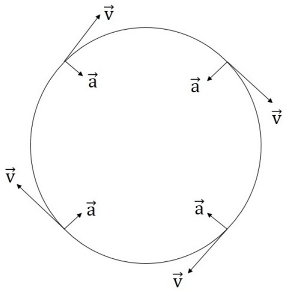
[۳] چون فرض کردیم که گلوله از مبدا مختصات شلیک می‌شود بنابراین $\vec{r}_{0\,\text{گلوله}} = 0$ است.

[۴] سرعت در هر نقطه، مماس بر دایره است.

برای محاسبه شتاب لحظه‌ای باید حد عبارت بالا را وقتی که $\Delta t \longrightarrow ۰$ بگیریم. اگر Δt کوچک باشد آن‌گاه زاویه θ نیز کوچک خواهد بود و برای زوایای کوچک $\sin\theta \simeq \theta$ است. بنابراین[5]:

$$\mathrm{a} = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta t} = \lim_{\theta \to ۰} \frac{\mathrm{v}^۲}{r} \frac{\sin(\frac{\theta}{۲})}{\frac{\theta}{۲}} = \frac{\mathrm{v}^۲}{r} \tag{۱۹}$$

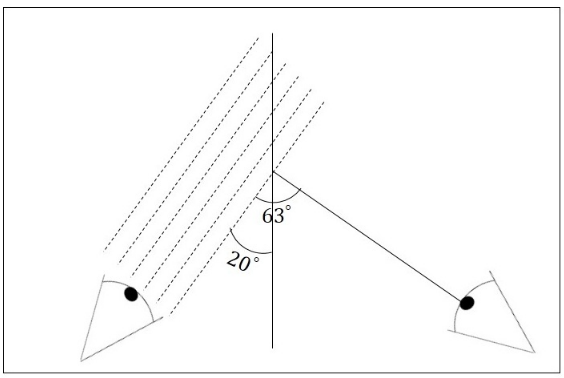
جهت شتاب همواره در جهت $\Delta \mathrm{v}$ یعنی به سمت مرکز دایره است. به همین دلیل شتاب در حرکت دایره‌ای را شتاب مرکزگرا می‌نامند چون در هر نقطه از مسیر به سمت مرکز دایره است.



مسئله: ماه به دور زمین می‌گردد و زمان یک دور گردش کامل آن ۲۸ روز است.فرض کنید ماه در مداری دایره‌ای با شعاع $۴ \times ۱۰^۸ m$ به دور زمین می‌چرخد. شتاب ماه در این مدار چقدر است؟
چون مدار حرکت ماه به دور زمین دایره‌ای است بنابراین مسافت پیموده شده توسط ماه در یک چرخش کامل به دور زمین برابر محیط دایره‌ای است که ماه در آن دایره به دور زمین می‌گردد. یعنی $\Delta x = ۲\pi r = ۲\pi(۴ \times ۱۰^۸) \simeq ۲۴ \times ۱۰^۸ m$. از طرفی مدت زمان یک چرخش کامل ماه نیز برابر است با $\Delta t = ۲۸ \times ۲۴ \times ۳۶۰۰ = ۲۴۱۹۲ \times ۱۰^۲ \simeq ۲/۵ \times ۱۰^۶ s$.

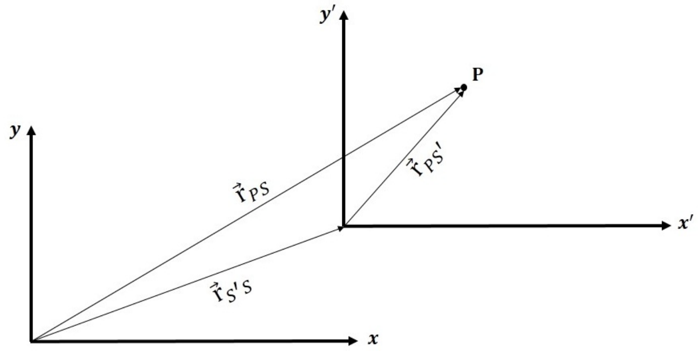
$$\mathrm{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۲۴ \times ۱۰^۸}{۲/۵ \times ۱۰^۶} = ۹/۶ \times ۱۰^۲ \frac{m}{s}$$
$$\mathrm{a} = \frac{\mathrm{v}^۲}{r} = \frac{(۹/۶ \times ۱۰^۲)^۲}{۴ \times ۱۰^۸} \simeq ۵/۸ \times ۱۰^{-۴} \frac{m}{s^۲}$$

حرکت نسبی: فرض کنید شما کنار خیابانی ایستاده‌اید و دو اتومبیل موازی با یکدیگر با سرعت $۵۰ \frac{km}{h}$ از روبروی شما عبور می‌کنند. در این صورت سرعت هر کدام از سرنشین‌های دو اتومبیل نسبت به یکدیگر صفر است. یعنی سرنشین‌های هر اتومبیل تصور می‌کند سرنشین‌های اتومبیل دیگر ساکن هستند در حالی‌که این سرنشین‌ها نسبت به شما دارای سرعت $۵۰ \frac{km}{h}$ هستند. حال اگر سرعت یکی از اتومبیل‌ها $۵۰ \frac{km}{h}$ و دیگری $۲۰ \frac{km}{h}$ باشد، سرعت نسبی این دو اتومبیل نسبت به یکدیگر $۳۰ \frac{km}{h}$ است. یعنی سرنشین هر کدام از اتومبیل‌ها تصور می‌کنند که سرنشینان اتومبیل دیگر با سرعت $۳۰ \frac{km}{h}$ از آن‌ها دور می‌شود.
نکته: سرعت نسبی دو متحرک، سرعتی است که هر یک از دو متحرک نسبت به دیگری احساس می‌کند و به دستگاه مختصاتی که هر کدام از متحرک‌ها در آن قرار دارند بستگی دارد. یعنی اگر متحرکی با یک سرعت در یک مسیر حرکت کند، ناظرهایی که حرکت این متحرک را می‌بینند برای سرعت آن، مقادیر و جهت‌های مختلفی به دست می‌آورند. مثلا در شکل زیر ناظر سمت راست زاویه بارش باران را ۶۳° اندازه می‌گیرد در حالی‌که زاویه بارش از دید ناظر سمت چپ برابر ۲۰° است.



[5] برای زوایای کوچک θ داریم: $\lim_{\theta \to ۰} \frac{\sin\theta}{\theta} = ۱$.

فرض کنید که ناظر S در مبدا دستگاه مختصات xoy و ناظر S' در مبدا دستگاه مختصات $x'o'y'$ باشند و دستگاه $x'o'y'$ نسبت به دستگاه xoy با سرعت ثابت حرکت می‌کند.



شکل ۳: حرکت نسبی متحرک‌ها با دستگاه مختصات مجزا

حال اگر متحرکی در لحظه t در نقطه P باشد هر یک از ناظرها، مختصات نقطه P را نسبت به مبدا دستگاه مختصات خودشان تعیین می‌کنند. یعنی نقطه P از دید ناظر S با بردار مکان $\vec{\mathrm{r}}_{PS}$ نمایش داده می‌شود و از دید ناظر S' با بردار $\vec{\mathrm{r}}_{PS'}$. از طرفی طبق شکل (۳) داریم:

$$\vec{\mathrm{r}}_{PS} = \vec{\mathrm{r}}_{S'S} + \vec{\mathrm{r}}_{PS'} = \vec{\mathrm{r}}_{PS'} + \vec{\mathrm{r}}_{S'S} \tag{۲۰}$$

بردار $\vec{\mathrm{r}}_{S'S}$، بردار مکان مبدا دستگاه $x'o'y'$ نسبت به مبدا دستگاه xoy است. اگر سرعت متحرک در نقطه P از دید ناظر S' برابر $\vec{\mathrm{v}}_{PS'}$ باشد سرعت این متحرک از دید ناظر S از طریق مشتق‌گیری از رابطه (۲۰) به دست می‌آید.

$$\frac{d\vec{\mathrm{r}}_{PS}}{dt} = \frac{d\vec{\mathrm{r}}_{PS'}}{dt} + \frac{d\vec{\mathrm{r}}_{S'S}}{dt} \Longrightarrow \vec{\mathrm{v}}_{PS} = \vec{\mathrm{v}}_{PS'} + \vec{\mathrm{v}}_{S'S}$$

با مشتق‌گیری از رابطه سرعت نیز می‌توان شتاب نسبی متحرک را به دست آورد. چون فرض بر این بود که دستگاه $x'o'y'$ نسبت به xoy با سرعت ثابت حرکت می‌کند بنابراین مشتق $\vec{\mathrm{v}}_{S'S}$ نسبت به زمان، صفر خواهد شد. زیرا $\vec{\mathrm{v}}_{S'S}$ در هر لحظه مقدار ثابتی است. در نتیجه:

$$\mathrm{a}_{PS} = \mathrm{a}_{PS'}$$

مسئله: برف در راستای قائم با سرعت ثابت $۸\frac{m}{s}$ می‌بارد. راننده‌ای با اتومبیلش روی سطح افقی با سرعت $۵۴\frac{km}{h}$ در حرکت است. سرعت و زاویه برف با راستای قائم را از دید راننده به دست آورید.

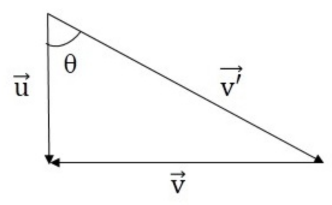
$$\vec{\mathrm{v}}_{\text{سرعت اتومبیل نسبت به زمین}} = ۵۴\frac{km}{h} = ۱۵\frac{m}{s}$$

$$\vec{\mathrm{u}}_{\text{سرعت برف نسبت به زمین}} = ۸\frac{m}{s}$$

$$\vec{\mathrm{v}}'_{\text{سرعت برف نسبت به اتومبیل}} = ?$$

$$\mathrm{v}' = \sqrt{\mathrm{v}^۲ + \mathrm{u}^۲} = \sqrt{۸^۲ + ۱۵^۲} = ۱۷\frac{m}{s}$$

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}} = \frac{۱۵}{۸} \Longrightarrow \theta = ۶۱/۹^\circ$$



تمرین:

۱ـ ارتفاع یک بازیکن بسکتبال با دستان کشیده از سطح زمین $۱۹۲cm$ است. این بازیکن در فاصله افقی $۳/۵m$ از حلقه قرار دارد. اگر ارتفاع حلقه از سطح زمین $۲/۵m$ باشد. بازیکن، توپ را با چه سرعتی با زاویه ۶۰° نسبت به افق پرتاب کند تا درون حلقه رود؟

۲ـ گلوله توپی را از سطح زمین با سرعت اولیه $۳۶/۵\frac{m}{s}$ در جهت ۶۲° بالاتر از سطح افق به طرف صخره‌ای به ارتفاع h پرتاب می‌کنیم. این گلوله $۵/۵s$ پس از پرتاب، روی صخره به زمین می‌خورد. (الف) ارتفاع صخره چقدر است؟ (ب) سرعت گلوله در لحظه برخورد به زمین چقدر است؟ (ج) ارتفاع اوج گلوله نسبت به زمین چقدر است؟

۳ـ هواپیمای سبکی با سرعت $۴۸۰\frac{km}{h}$ نسبت به هوا پرواز می‌کند. مقصد خلبان نقطه‌ای در فاصله $۸۱۰km$ به طرف شمال

است. خلبان متوجه می‌شود که به علت وزش باد، هواپیما را باید به اندازه ۲۱° از شمال به طرف شرق هدایت کند تا به مقصد برسد. هواپیما در مدت $۱/۹h$ به مقصد می‌رسد. اندازه و جهت سرعت باد را بیابید.

۴− ماهواره‌ای در ارتفاع $۲۱۰km$ از سطح زمین به دور زمین می‌گردد. در این ارتفاع مقدار شتاب گرانش برابر است با $g = ۹/۲\frac{m}{s^۲}$. اگر شعاع زمین $۶۴۰۰km$ باشد سرعت چرخش ماهواره به دور زمین چقدر است؟

۵− هواپیمایی با سرعت $۲۱۵\frac{km}{h}$ نسبت به هوا به سمت شرق در حرکت است. باد ثابتی با سرعت $۶۵\frac{km}{h}$ به طرف شمال می‌وزد. (الف) اندازه و جهت سرعت هواپیما نسبت به زمین چقدر است؟ (ب) اگر خلبان بخواهد به طرف شرق برود، هواپیما را باید در چه جهتی هدایت کند؟

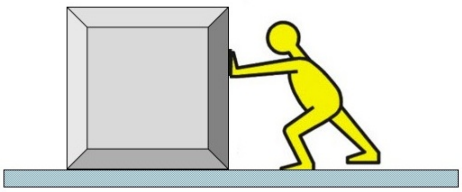
فصل پنجم

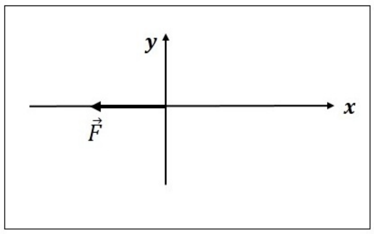
دینامیک

قانون اول نیوتن: اگر به یک جسم نیرویی وارد نشود دو حالت اتفاق می‌افتد. اگر جسم با سرعت ثابت در حال حرکت بوده است به حرکت خود با سرعت ثابت ادامه می‌دهد و اگر جسم ساکن بوده نیز ساکن می‌ماند.
نکته: در عمل، یافتن جسمی که هیچ نیرویی به آن وارد نمی‌شود دشوار است چون حداقل نیروی وزن به همه اجسام نزدیک سطح زمین وارد می‌شود. بنابراین جسمی که هیچ نیروی خارجی بر آن وارد نمی‌شود را هم‌ارز جسمی که برآیند نیروهای خالص وارد بر آن صفر است در نظر می‌گیریم.
قانون دوم نیوتن: اگر به جسمی به جرم m نیروی $\vec{\mathrm{F}}$ وارد شود، در اثر این نیرو، جسم شتابی می‌گیرد به اندازه $\vec{a}=\frac{\vec{\mathrm{F}}}{m}$ و در جهت نیرو. بنابراین اگر یک نیروی یکسان $\vec{\mathrm{F}}$ را به دو جسم با جرم‌های متفاوت $m_۱$ و $m_۲$ وارد کنیم، شتاب جسم سبکتر(جرم کمتر) بیشتر است. یعنی:

$$\begin{cases} \vec{\mathrm{F}}_۱=m_۱\vec{a}_۱ \\ \\ \vec{\mathrm{F}}_۲=m_۲\vec{a}_۲ \end{cases} \xrightarrow{|\vec{\mathrm{F}}_۱|=|\vec{\mathrm{F}}_۲|} \quad m_۱a_۱=m_۲a_۲ \Longrightarrow \frac{a_۱}{a_۲}=\frac{m_۲}{m_۱}$$

بیان ریاضی قانون دوم نیوتن: اگر برآیند همه نیروهایی که به جسمی به جرم m وارد می‌شود را با $\sum\vec{\mathrm{F}}$ نشان دهیم[۱]، آن‌گاه $\sum\vec{\mathrm{F}}=m\vec{a}$ که در آن $\vec{a}$ شتاب حرکت جسم است.
نکته: نیرو کمیتی برداری است یعنی جهت و اندازه دارد و از قوانین جمع برداری نیز پیروی می‌کند. یکای نیرو مطابق قانون دوم برابر $\frac{kg\ m}{s^۲}$ است که به پاس زحمات نیوتن آن را به نام نیوتن نام‌گذاری کرده‌اند.
مسئله: شخصی یک صندوق ساکن به جرم $m=۱۵۰kg$ را با نیروی $\mathrm{F}=۸۰N$ به سمت چپ هل می‌دهد و آن را ۵۰ متر جابه‌جا می‌کند. سرعت نهایی صندوق چقدر است؟
برای حل مسائل دینامیک، جسم را به صورت یک نقطه در نظر می‌گیریم و نیروهای وارد بر آن را با بردارهایی نشان می‌دهیم. سپس با تجزیه نیروها، شتاب حرکت جسم در هر راستایی را می‌یابیم. بنابراین اگر نیروهای افقی وارد بر صندوق به صورت شکل سمت راست باشد، با به کار بردن قانون دوم نیوتن در راستای x داریم:



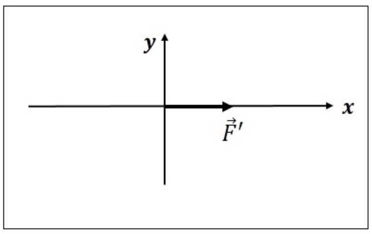


$$m=۱۵۰kg\ ;\ \mathrm{F}=۸۰N \Longrightarrow a=\frac{\mathrm{F}}{m}=/۵۳\frac{m}{s^۲}\ ;\ \Delta x=۵۰m\ ;\ \mathrm{v}_۰=۰\ ;\ \mathrm{v}=?$$

چون حرکت در یک بعد(جسم فقط در راستای محور x حرکت می‌کند) انجام می‌شود بنابراین به کمک رابطه (۵) فصل سوم داریم:

$$\mathrm{v}^۲-\mathrm{v}_۰^۲=۲a\Delta x \Longrightarrow \mathrm{v}=\sqrt{۲a\Delta x+\mathrm{v}_۰}=\sqrt{۲\times /۵۳\times ۵۰}=۷/۳\frac{m}{s}$$

چون نیرو در جهت $(-\hat{i})$ بر صندوق وارد می‌شود و شتاب نیز با نیرو هم‌جهت است بنابراین شتاب جسم نیز در جهت $(-\hat{i})$ است. در نتیجه سرعت صندوق هم در جهت $(-\hat{i})$ خواهد بود. چون سرعت اولیه، صفر است پس سرعت نهایی و شتاب صندوق هم‌جهتند.
مسئله: اگر شخص مسئله قبل بخواهد در مدت $۵s$ جهت حرکت صندوق را برعکس کند، چه نیرویی باید وارد کند؟
در این حالت، شخص باید نیرویی مثل $\vec{\mathrm{F}}'$ به جسم وارد کند تا به سمت راست حرکت کند. بنابراین به کمک رابطه (۲) فصل سوم داریم:



$$t=۵s\ ;\ \mathrm{v}_۰=۰\ ;\ \mathrm{v}=۷/۳\frac{m}{s}\ ;\ \mathrm{F}'=?$$

$$\mathrm{v}=at+\mathrm{v}_۰ \Longrightarrow a=\frac{\mathrm{v}-\mathrm{v}_۰}{t}\simeq ۱/۵\frac{m}{s^۲}$$

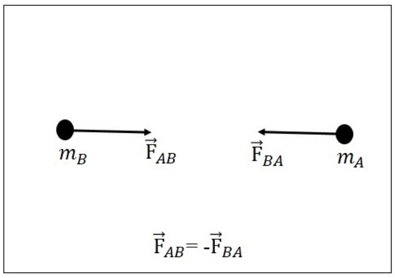
$$\mathrm{F}'=ma=۲۲۵N$$

---
[۱] $\sum\vec{\mathrm{F}}$، جمع برداری هم نیروهای وارد بر جسم است.

نیروی $\vec{F}'$ در جهت $(+\hat{i})$ باید به جسم وارد شود تا جسم به سمت راست حرکت کند.
مسئله: صندوقی به جرم $m = ۳۵۰kg$ روی کفه کامیونی که با سرعت $۱۲۰\frac{km}{h}$ در حرکت است قرار دارد. این صندوق نسبت به کامیون، ساکن است. راننده ترمز می‌کند و در مدت $۲۰s$ سرعتش را به $۴۰\frac{km}{h}$ می‌رساند. در این مدت چه نیرویی به صندوق وارد شده است؟
اگرچه صندوق نسبت به ناظری که روی کامیون قرار دارد ساکن است ولی نسبت به ناظری که روی زمین قرار دارد با سرعت $۱۲۰\frac{km}{h}$ در حرکت است و سرعت نهایی‌اش نیز $۴۰\frac{km}{h}$ می‌باشد. بنابراین:

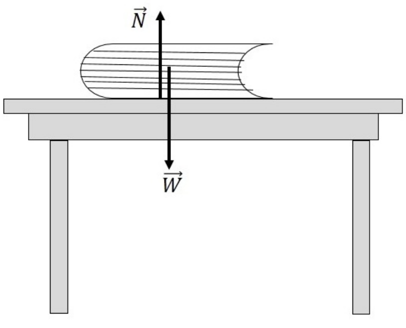
$$\mathrm{v}_\circ = ۱۲۰\frac{km}{h} = ۳۳/۳\frac{m}{s}\ ; \mathrm{v} = ۴۰\frac{km}{h} = ۱۱/۱\frac{m}{s}\ ;\ t = ۲۰s$$
$$a = \frac{\mathrm{v} - \mathrm{v}_\circ}{t} = -۱/۱\frac{m}{s^۲} \Longrightarrow \mathrm{F} = ma = -۳۸۵N$$

علامت منفی نشان می‌دهد که نیرو در جهت $(-\hat{i})$ وارد می‌شود یعنی در جهت کاهش x.
نیروی وزن: نیرویی است که از طرف کره زمین بر اجسام نزدیک سطح زمین وارد می‌شود و با $\vec{W}$ نشان می‌دهند. اگر قانون دوم نیوتن را برای جسمی که از یک ارتفاع معین نسبت به سطح زمین رها می‌کنیم به کار ببریم داریم: $\vec{\mathrm{F}} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{W} = m\vec{g}$
چون جسم با شتاب گرانش سقوط می‌کند.
قانون سوم نیوتن: اگر جسم A بر جسم B نیروی $\vec{\mathrm{F}}_{BA}$ وارد کند آن‌گاه جسم B نیز نیروی $\vec{\mathrm{F}}_{AB}$ که اندازه آن برابر $|\vec{\mathrm{F}}_{BA}|$ و در خلاف جهت آن است بر جسم A وارد می‌کند.



شکل ۱: قانون سوم نیوتن($\vec{\mathrm{F}}_{BA}$ و $\vec{\mathrm{F}}_{AB}$ قرینه یکدیگرند)

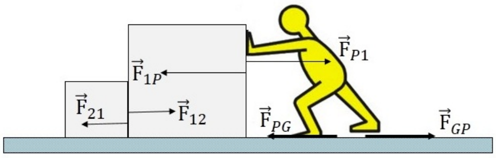
نکته: هر نیرویی در طبیعت همواره بین دو جسم اثر می‌کند. مثلا نیروی وزن وارد بر یک جسم بین زمین و آن جسم رد و بدل می‌شود. نیروهای $\vec{\mathrm{F}}_{BA}$ و $\vec{\mathrm{F}}_{AB}$در شکل (۱) را نیروهای عمل و عکس‌العمل و قانون سوم نیوتن را نیز قانون عمل و عکس‌العمل می‌نامند.
نکته: نیروهای عمل و عکس‌العمل به دو جسم مجزا وارد می‌شوند. مثلا اگر نیروی عمل را جسم اول به جسم دوم وارد کند نیروی عکس‌العمل را جسم دومی به اولی وارد می‌کند.
کتابی که روی یک میز قرار دارد را در نظر بگیرید. به این کتاب نیروی وزن به سمت مرکز کره زمین وارد می‌شود. بنابراین توقع داریم کتاب در جهت نیروی وزن، شتاب بگیرد و حرکت کند ولی کتاب ساکن است و حرکت نمی‌کند. دلیل این امر آن است که میز، نیرویی رو به بالا(در خلاف جهت نیروی وزن کتاب) به کتاب وارد می‌کند که مساوی با نیروی وزن است. بنابراین در راستای قائم، برآیند نیروهای وارد بر کتاب صفر است و کتاب در جهت بالا یا پایین شتاب نمی‌گیرد.
به چنین نیروهایی که به اجسامی که روی یک سطح قرار دارند وارد می‌شود و همواره عمود بر سطح است نیروی عمود بر سطح می‌گویند و با $\vec{N}$ نمایش می‌دهند.



نکته: برای کتابی که روی میز قرار دارد نیروهای عمود بر سطح$(\vec{N})$ و وزن$(\vec{W})$ نیروهای عمل و عکس‌العمل نیستند. چون هر دو نیرو به یک جسم(کتاب) وارد می‌شوند. البته هر کدام از این دو نیرو دارای یک عکس‌العمل نیز هستند. مثلا عکس‌اعمل نیروی $\vec{N}$ از طرف کتاب بر سطح وارد می‌شود و عکس‌العمل $\vec{W}$ از طرف کتاب بر کره زمین وارد می‌شود.

نکته: برای حل مسائل دینامیک لازم است حرکت یک جسم خاص را بررسی کنیم. بنابراین باید ابتدا یک دستگاه مختصات مناسب را انتخاب کنیم و آن جسم تنها را به صورت یک نقطه در مبدا دستگاه مختصات در نظر بگیریم و نیروهایی که به آن جسم وارد می‌شود

را از مبدا رسم کنیم. سپس با تجزیه نیروهای وارد بر جسم، حرکت آن جسم را به کمک قانون دوم نیوتن در راستای محورهای مختصات بررسی می‌کنیم. اگر نیرویی که بر یک جسم وارد می‌شود هم‌جهت با حرکت جسم باشد(هم‌جهت با شتاب حرکت) در محاسبه جمع برداری نیروها، آن نیرو را مثبت در نظر می‌گیریم و اگر خلاف جهت حرکت جسم باشد آن را منفی در نظر می‌گیریم.
مسئله: مطابق شکل زیر شخصی دو صندوق متصل به یکدیگر را هل می‌دهد. نیروهای عمل و عکس‌العمل وارد بر شخص و هر کدام از صندوق‌ها را مشخص کنید.



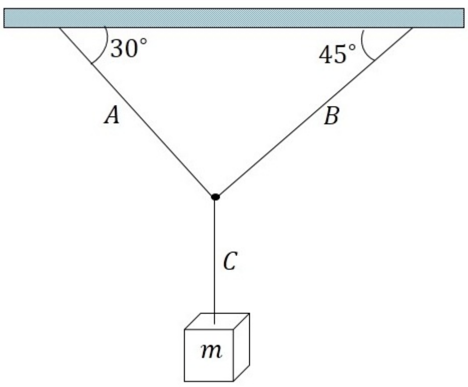
اگر شخص کارگر را تنها در نظر بگیریم، نیروی $\vec{F}_{۱P}$ را این شخص به صندوق اول وارد می‌کند. بنابراین صندوق اول نیز نیرویی مساوی و خلاف جهت آن به شخص وارد می‌کند که آن را با $\vec{F}_{P۱}$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین شخص برای حرکت کردن به جلو باید نیروی $\vec{F}_{GP}$ را به زمین وارد کند.

بنابراین زمین نیز نیروی $\vec{F}_{PG}$ که مساوی و در خلاف جهت $\vec{F}_{GP}$ است را به کارگر وارد می‌کند[۲]. اگر صندوق دوم را از بقیه اجسام مجزا در نظر بگیریم، نیروی $\vec{F}_{۲۱}$ از طرف صندوق اول به صندوق دوم وارد می‌شود. در نتیجه صندوق دوم نیز نیرویی مساوی و در خلاف جهت به صندوق اول وارد می‌کند که همان $\vec{F}_{۱۲}$ است. بنابراین شتاب صندوق دوم برابر است با $F_{۲۱} = m_۲ a_۲ \Longrightarrow a_۲ = \frac{F_{۲۱}}{m_۲}$.
همان‌طور که بیان کردیم فقط نیروهایی که به صندوق دوم وارد می‌شوند در شتاب این صندوق موثرند. یعنی $\vec{F}_{۱۲}$ که از طرف صندوق دوم بر صندوق اول وارد می‌شود تاثیری در شتاب صندوق دوم ندارد. برای محاسبه شتاب صندوق اول کافی است نیروهایی که به آن وارد می‌شوند را در نظر گرفت یعنی $\vec{F}_{۱۲}$ که از طرف صندوق دوم وارد می‌شود و $\vec{F}_{۱P}$ که از طرف کارگر وارد می‌شود. بنابراین:

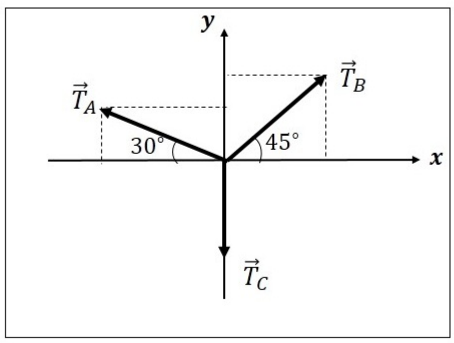
چون $\vec{F}_{۱۲}$ و $\vec{F}_{۱P}$ در خلاف جهت یکدیگرند:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_{۱۲} - \vec{F}_{۱P}$$
$$\sum F = m_۱ a_۱ \Longrightarrow a_۱ = \frac{F_{۱۲} - F_{۱P}}{m_۱}$$

اگر هر دو صندوق را به عنوان یک جسم با جرم $m_۱ + m_۲$ در نظر بگیریم آن‌گاه نیروهای $\vec{F}_{۱۲}$ و $\vec{F}_{۲۱}$ نیروهای داخلی محسوب می‌شوند و تاثیری در حرکت جسم ندارند. برای هر دو صندوق به عنوان یک جسم مرکب داریم $\vec{F}_{۱P} = (m_۱ + m_۲)\vec{a}$. چون تنها نیروی خالصی که به مجموعه دو صندوق اثر می‌کند نیروی $\vec{F}_{۱P}$ است که از طرف کارگر وارد می‌شود.
نکته: در این مسئله فقط نیروهای افقی را در نظر گرفتیم و نیروهایی که در راستای قائم بر جسم‌ها اثر می‌کنند مانند وزن و نیروی عمود بر سطح را در نظر نگرفتیم چون مولفه افقی شتاب مد نظرمان بود.
نیروی کشش نخ: در اغلب مسائل دینامیک اجسامی که به وسیله نخ از یک قرقره یا یک سطح آویزان هستند را بررسی می‌کنیم. نیرویی که به کمک آن ریسمان، اجسام متصل به خودش را نگه می‌دارد نیروی کشش می‌نامند و با $\vec{T}$ نشان می‌دهند.
مسئله: در شکل مقابل جسمی به جرم $۱۵kg$ توسط سه ریسمان نگه داشته شده است. نیروی کشش هر کدام از ریسمان‌ها را به دست آورید.



اگر محل تلاقی سه ریسمان را به عنوان مبدا دستگاه مختصات انتخابی در نظر بگیریم و نیروهای کشش این سه ریسمان را تجزیه کنیم داریم:

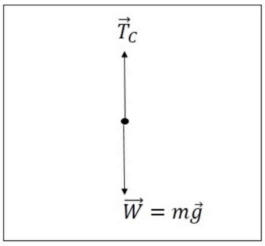


نیروی کشش $\vec{T}_C$ را نخ C بر جسم m رو به بالا وارد می‌کند و عکس‌العمل آن را جسم، بر نخ C رو به پایین وارد می‌کند. از طرفی محل تلاقی ریسمان‌ها ساکن است و شتابی ندارد. بنابراین:

$$\vec{T}_A = (T_A)_x(-\hat{i}) + (T_A)_y(\hat{j}) \Longrightarrow \vec{T}_A = -T_A \cos ۳۰^\circ \hat{i} + T_A \sin ۳۰^\circ \hat{j} \simeq -/۹T_A\hat{i} + /۵T_A\hat{j}$$
$$\vec{T}_B = (T_B)_x(\hat{i}) + (T_B)_y(\hat{j}) \Longrightarrow \vec{T}_B = T_B \cos ۴۵^\circ \hat{i} + T_B \sin ۴۵^\circ \hat{j} \simeq /۷T_B\hat{i} + /۷T_B\hat{j}$$

[۲] این نیرو همان نیروی اصطکاک است.

$$\sum \mathrm{F}_x = ۰ \Longrightarrow (T_A)_x + (T_B)_x = ۰ \Longrightarrow /۷T_B - /۹T_A = ۰ \tag{۱}$$
$$\sum \mathrm{F}_y = ۰ \Longrightarrow (T_A)_y + (T_B)_y - T_C = ۰ \Longrightarrow /۵T_A + /۷T_B - T_C = ۰ \tag{۲}$$



اکنون معادلات (۱) و (۲) تشکیل یک دستگاه معادلات می‌دهند که شامل دو معادله و سه مجهول است. اگر یکی از مجهول‌ها را به دست آوریم و در معادله مربوطه‌اش جایگذاری کنیم به دستگاه دومعادله دو مجهولی می‌رسیم که قابل حل است. برای محاسبه $\vec{T}_C$ می‌توانیم جسم را تنها در نظر بگیریم. بنابراین برای جسم m داریم:

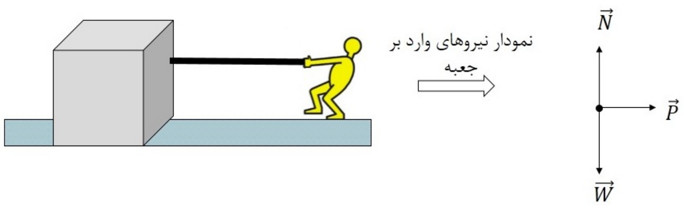
$$\sum \mathrm{F}_y = ۰ \Longrightarrow T_C - mg = ۰ \Longrightarrow T_C = mg = ۱۴۷N$$

با قراردادن این مقدار در رابطه (۲) داریم:

$$\begin{cases} /۷T_B - /۹T_A = ۰ \\ /۵T_A + /۷T_B - ۱۴۷ = ۰ \end{cases}$$

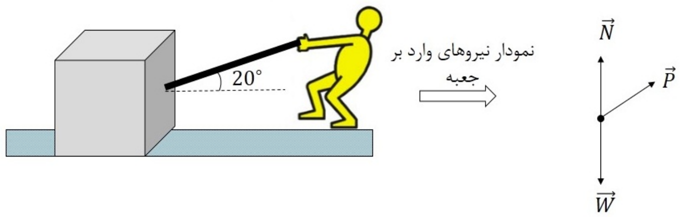
با حل این دستگاه دو معادله دو مجهولی مقادیر T_A و T_B به دست می‌آیند: $T_A = ۱۰۵N$ و $T_B = ۱۳۵N$.

مسئله: جعبه‌ای به جرم $m = ۷/۵kg$ را روی سطح بدون اصطکاکی به وسیله یک ریسمان با نیروی ۲۱نیوتنی می‌کشیم. شتاب افقی جعبه وقتی که (الف) نیرو به صورت افقی وارد می‌شود (ب) وقتی نیرو با زاویه ۲۰° نسبت به محور افقی وارد می‌شود را به دست آورید.



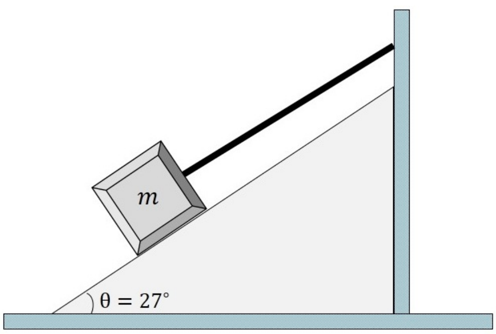
(الف) در این بخش، حرکت جعبه را تحت نیروی افقی $\vec{P}$ بررسی می‌کنیم(از نیروی کشش نخ صرف‌نظر می‌کنیم). چون جعبه در راستای قائم حرکتی ندارد پس باید برآیند نیروهای وارد بر جعبه در راستای محور y برابر صفر شود.

$$\sum \mathrm{F}_x = ma_x \Longrightarrow P = ma_x \Longrightarrow a_x = \frac{P}{m} = \frac{۲۱}{۷/۵} = ۲/۸\frac{m}{s^۲}$$
$$\sum \mathrm{F}_y = ۰ \Longrightarrow N - mg = ۰ \Longrightarrow N = mg = ۷۳/۵N$$



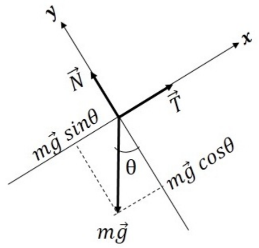
(ب) اگر نیروی $\vec{P}$ با زاویه ۲۰° نسبت به افق بر جعبه وارد شود داریم:

$$\sum \mathrm{F}_x = ma_x \Longrightarrow P\cos ۲۰^\circ = ma_x \Longrightarrow a_x = \frac{P\cos ۲۰^\circ}{m} = ۲/۶\frac{m}{s^۲}$$
$$\sum \mathrm{F}_y = ۰ \Longrightarrow N + P\sin ۲۰^\circ - mg = ۰ \Longrightarrow N = mg - P\sin ۲۰^\circ = ۶۷/۲N$$



مسئله: جسمی به جرم $۱۸kg$ مطابق شکل روی یک سطح شیبدار بدون اصطکاک توسط ریسمانی به دیوار بسته شده است. (الف) نیروی کشش ریسمان و نیروی عمود بر سطح را بیابید. (ب) اگر ریسمان پاره شود، حرکت جسم را مشخص کنید.

محیط اطراف جسم را نادیده می‌گیریم و فقط جسم را در نظر می‌گیریم. نیروی عمود بر سطح $\vec{N}$ بر سطح شیبدار عمود است و نیروی وزن در دستگاه مختصاتی که انتخاب کرده‌ایم دارای دو مولفه است. (الف) چون جسم در هیچ راستایی حرکت ندارد و ساکن است بنابراین شتاب حرکت نیز صفر است. در نتیجه:



$$\sum \mathrm{F}_x = ۰ \Longrightarrow T - mg\sin ۲۷^\circ = ۰ \Longrightarrow T = mg\sin ۲۷^\circ = ۷۹/۴N$$
$$\sum \mathrm{F}_y = ۰ \Longrightarrow N - mg\cos ۲۷^\circ = ۰ \Longrightarrow N = mg\cos ۲۷^\circ = ۱۵۸/۸N$$

(ب) اگر ریسمان پاره شود نیروی کشش آن از بین می‌رود و جسم با شتاب a به سمت پایین سطح شیبدار حرکت می‌کند. یعنی حرکت جسم در راستای محور x از دستگاه مختصاتی که انتخاب کرده‌ایم شتابدار است ولی در راستای y این دستگاه مختصات ساکن است. از آنجاکه مولفه افقی نیروی وزن در جهت حرکت جسم است آن را مثبت در نظر می‌گیریم. یعنی:

$$\sum \mathrm{F}_x = ma_x \Longrightarrow +mg\sin ۲۷^\circ = ma_x \Longrightarrow a_x = ۴/۴\frac{m}{s^۲} \Longrightarrow \vec{a} = ۴/۴(-\hat{i})$$
$$\sum \mathrm{F}_y = ۰ \Longrightarrow N - mg\cos ۲۷^\circ = ۰ \Longrightarrow N = mg\cos ۲۷^\circ = ۱۵۸/۸N$$

مسئله: شخصی به جرم $۶۰kg$ درون آسانسوری روی یک ترازو قرار دارد. (الف) اگر آسانسور با سرعت ثابت پایین بیاید (ب) اگر آسانسور با شتاب $۲\frac{m}{s^۲}$ بالا رود، ترازو چه عددی را نشان می‌دهد؟

می‌دانیم که شخص، نیرویی به ترازو وارد می‌کند و بر اساس قانون سوم نیوتن ترازو نیز نیرویی مساوی و در خلاف جهت بر شخص وارد می‌کند و این همان عددی است که ترازو نشان می‌دهد. این نیرو درواقع همان نیروی عمود بر سطح ترازو است. در شکل مقابل نیروهای وارد بر شخص را رسم کرده‌ایم. در این نمودار اندازه بردار $\vec{N}$ همان عددی است که ترازو نشان می‌دهد. اگر آسانسور با شتاب $\vec{a}$ حرکت کند(بالا یا پایین) از نظر ناظری که بیرون آسانسور قرار دارد شتاب شخص نیز همان $\vec{a}$ خواهد بود. بنابراین:

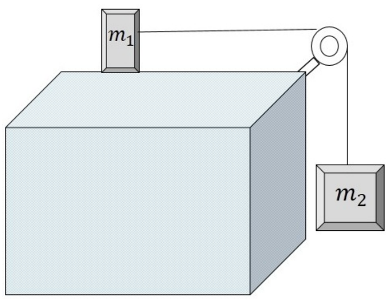
$$\sum \mathrm{F}_y = ma \Longrightarrow N - mg = ma \Longrightarrow N = m(g+a)$$

(الف) اگر آسانسور با سرعت ثابت حرکت کند، شتابی ندارد. بنابراین:

$$N = m(g+۰) = ۵۸۸N$$

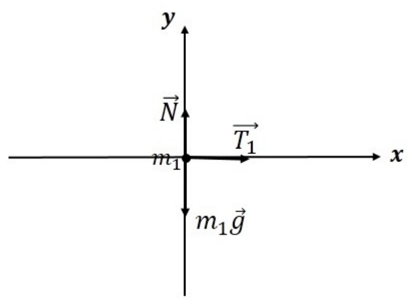
(ب) اگر آسانسور با شتاب $۲\frac{m}{s^۲}$ بالا رود. یعنی $\vec{a} = +۲\hat{j}$.

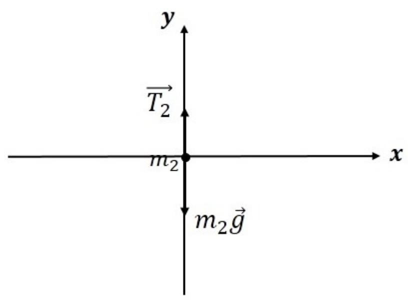
$$N = m(g+a) = ۶۰(۹/۸+۲) = ۷۰۸N$$



مسئله: مطابق شکل به دو سر یک نخ جسم‌هایی به جرم $m_۱$ و $m_۲$ بسته و از روی یک قرقره گذرانده‌ایم. $m_۱$ روی سطح صاف بدون اصطکاکی قرار دارد. نیروی کشش نخ و شتاب حرکت اجسام را با فرض اینکه $m_۲ > m_۱$ باشد تعیین کنید.

نمودار مربوط به جسم‌ها را به صورت مجزا رسم می‌کنیم.





ابتدا نشان می‌دهیم که نیروی کشش نخ برای هر دو بخش آن یکسان است. یعنی $T_۱ = T_۲$. چون اگر تنها نخ را در نظر بگیریم بر آن فقط عکس‌العمل نیروهای $T_۱$ و $T_۲$ وارد می‌شود و چون نخ را در مسائل دینامیک بدون جرم فرض می‌کنیم پس نیروی خالصی

به آن وارد نمی‌شود[3]. بنابراین باید عکس‌العمل نیروهای T_1 و T_2 مساوی و در خلاف جهت یکدیگر باشند تا برآیند نیروهای وارد بر نخ صفر باشد. چون T_1 و T_2 با یکدیگر برابرند آن‌ها را با نیروی مشترک T نمایش می‌دهیم. از طرفی می‌دانیم که شتاب حرکت هر دو جسم یکسان است. برای جسم m_1 که به سمت راست حرکت می‌کند داریم:

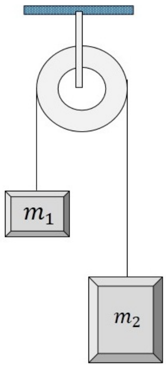
$$\sum \mathrm{F}_x = m_1 a \Longrightarrow +T_1 = m_1 a \xrightarrow{T_1=T} T = m_1 a \qquad (۳)$$
$$\sum \mathrm{F}_y = 0 \Longrightarrow N - m_1 g = 0 \Longrightarrow N = m_1 g$$

برای جسم m_2 که حرکتش به سمت پایین است،$m_2\vec{g}$ در جهت حرکت و $\vec{T}$ خلاف جهت حرکت m_2 است. بنابراین:

$$\sum \mathrm{F}_y = m_2 a \Longrightarrow -T_2 + m_2 g = m_2 a \xrightarrow{T_2=T} -T + m_2 g = m_2 a \qquad (۴)$$

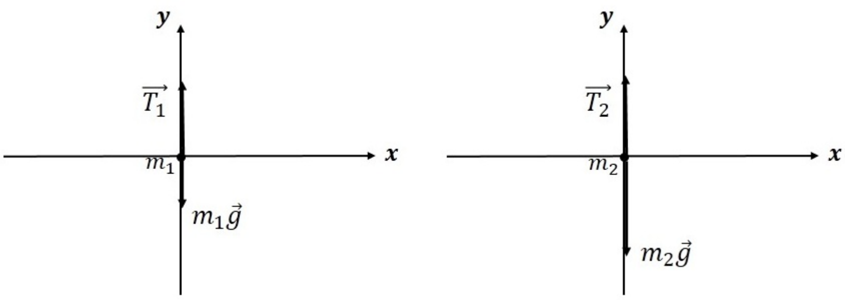
با حل دستگاه دو معادله دو مجهولی که از روابط (۳) و (۴) به دست می‌آید داریم:

$$\begin{cases} T = m_1 a \\ \\ -T + m_2 g = m_2 a \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} a = \frac{m_2}{m_1+m_2} g \\ \\ T = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} g \end{array} \qquad (۵)$$



مسئله: سیستم شکل مقابل را ماشین آتود می‌نامند. در این سیستم دو جسم با جرم‌های مختلف توسط یک نخ از قرقره‌ای آویزان هستند. با فرض اینکه $m_2 > m_1$ باشد، کشش نخ و شتاب حرکت جسم‌ها چقدر خواهد بود؟

برای هر کدام از اجسام، نیروهای وارده را رسم می‌کنیم و حرکتشان را بررسی می‌کنیم. می‌دانیم حرکت هر دو جسم در راستای قائم صورت می‌گیرد. یعنی برای هر دو جسم $\sum \mathrm{F}_x = 0$ است.

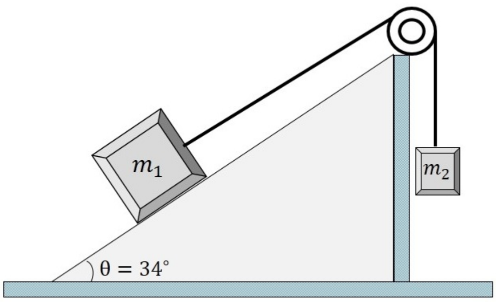


برای جسم m_1 داریم:
$$\sum \vec{\mathrm{F}} = m_1 \vec{a}_1 \Longrightarrow \vec{T}_1 - m_1 \vec{g} = m_1 \vec{a}_1$$
برای جسم m_2 داریم:
$$\sum \vec{\mathrm{F}} = m_2 \vec{a}_2 \Longrightarrow \vec{T}_2 - m_2 \vec{g} = m_2 \vec{a}_2$$

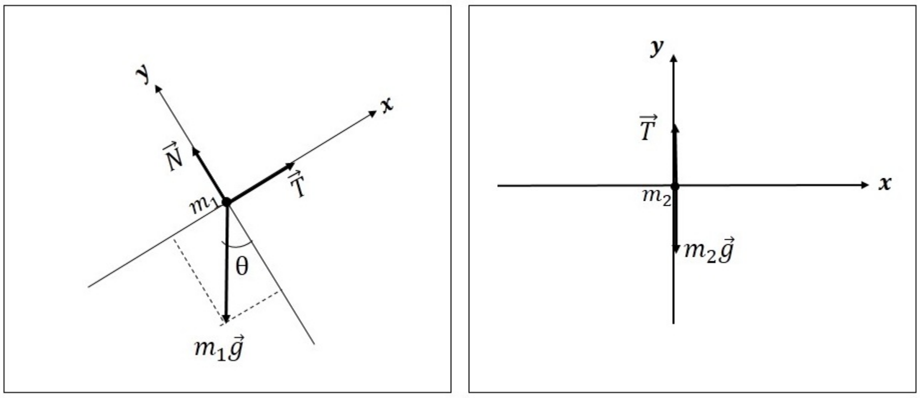
چون $m_2 > m_1$ است بنابراین جسم m_2 در جهت پایین و جسم m_1 در جهت بالا حرکت می‌کنند. بنابراین برای جسم m_1 نیروی $\vec{T_1}$ در جهت حرکت است و مثبت در نظر گرفته می‌شود و نیروی $m_1\vec{g}$ در خلاف جهت حرکت است و با علامت منفی در محاسبات وارد می‌شود. برای جسم m_2 نیز $m_2\vec{g}$ در جهت حرکت و $\vec{T_2}$ در خلاف جهت حرکت است. از طرفی مانند مثال قبل می‌توان ثابت کرد که $T_1 = T_2$. بنابراین با قرار دادن $T_1 = T_2 = T$ در دو معادله اخیر و حل دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر می‌توان مقادیر T و a را به دست آورد.

$$\begin{cases} T - m_1 g = m_1 a \\ \\ T - m_2 g = -m_2 a \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} a = \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2} g \\ \\ T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1+m_2} g \end{array} \qquad (۶)$$

[3] چون طبق قانون دوم نیوتن برای هر جسمی به جرم صفر داریم $\sum \mathrm{F} = 0$.



مسئله: در سیستم شکل روبرو اگر $m_۱ = ۹kg$ و $m_۲ = ۲kg$ باشد و سیستم را از حالت سکون رها کنیم، حرکت اجسام را توصیف کنید.
فرض می‌کنیم که $m_۲$ به سمت پایین و $m_۱$ به سمت بالای سطح حرکت کنند. یعنی شتاب $m_۱$ در جهت مثبت محور x دستگاه مختصات سمت چپ و شتاب $m_۲$ در جهت منفی محور y دستگاه سمت راست شکل زیر باشد. در این صورت اگر شتابی که به دست می‌آوریم مثبت باشد، یعنی حرکت در همان جهتی که فرض کرده‌ایم انجام شده و اگر شتاب به دست آمده منفی باشد، یعنی شتاب حرکت در خلاف جهت فرض شده است.
همانند مسئله قبل می‌توان ثابت کرد که نیروی کشش در هر دو بخش سیستم برابر است و شتاب هر دو جسم نیز یکسان است. با این تفاوت که جسم $m_۱$ در جهت مثبت محور x دستگاه مختصاتش حرکت شتابدار انجام می‌دهد و جسم $m_۲$ در جهت منفی محور قائم دستگاه مختصاتش شتاب می‌گیرد. با رسم نمودار نیروهای وارد بر اجسام $m_۱$ و $m_۲$ و استفاده از قانون دوم نیوتن داریم:



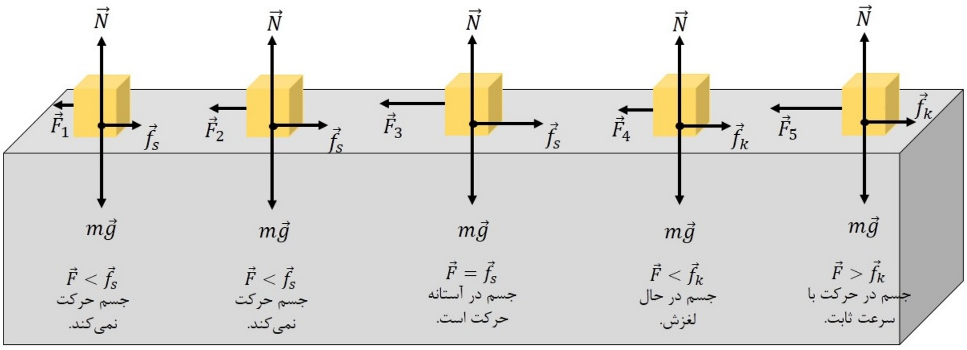
$$\text{جسم } m_۱ \begin{cases} \sum \mathrm{F}_x = m_۱ a \Longrightarrow T - m_۱ g \sin ۳۴^\circ = m_۱ a \\ \sum \mathrm{F}_y = ۰ \Longrightarrow N - m_۱ g \cos ۳۴^\circ = ۰ \Longrightarrow N = m_۱ g \cos ۳۴^\circ = ۷۳/۲N \end{cases} \tag{۷}$$

$$\text{جسم } m_۲ \sum \mathrm{F}_y = m_۲ a \Longrightarrow -T + m_۲ g = -m_۲ a \tag{۸}$$

با حل دستگاه دو معادله دو مجهولی که از روابط (۷) و (۸) به دست می‌آید داریم:

$$a = \frac{m_۲ - m_۱ \sin ۳۴^\circ}{m_۱ + m_۲} g = -۲/۷۱ \frac{m}{s^۲}$$
$$T = \frac{m_۱ m_۲ (۱ + \sin ۳۴^\circ)}{m_۱ + m_۲} g = ۲۵N$$

اگر زاویه سطح شیبدار با محور افقی را صفر در نظر بگیریم به جای نتایج اخیر، به روابط (۵) و اگر زاویه سطح شیبدار با محور افقی نود درجه باشد به روابط (۶) دست خواهیم یافت. در این مسئله مقدار شتاب منفی به دست آمد بنابراین جهت حرکت واقعی خلاف جهت حرکتی است که فرض کردیم. یعنی جسم $m_۱$ به سمت پایین سطح و جسم $m_۲$ به سمت بالا حرکت می‌کند.
نیروی اصطکاک: تا کنون در مسائل حل شده فرض کردیم تمام سطوح بدون اصطکاک هستند ولی درواقع هر سطحی به جسم روی خودش نیرویی در خلاف جهت حرکت جسم وارد می‌کند که به آن نیروی اصطکاک می‌گوییم.
در عمل هر جسمی که روی یک سطح در حرکت است بالاخره پس از مدتی متوقف می‌شود. بنابراین باید نیرویی در خلاف جهت حرکت بر جسم وارد شده باشد که با شتاب اولیه مخالفت کرده و باعث توقف جسم می‌شود. نیروی اصطکاک وارد بر هر جسم در خلاف جهت حرکت آن جسم است(با حرکت جسم مخالفت می‌کند). فرض کنید جسمی به جرم m روی یک سطح قرار دارد به طوری که اگر نیروی کوچکی به جسم اعمال کنیم، حرکت نمی‌کند. نیرو را به تدریج افزیش می‌دهیم تا جایی که جسم شروع به لغزش روی سطح کند و پس از آن روی سطح به حرکت خود ادامه دهد.
همان طور که در شکل مشاهده می‌شود با اعمال نیروی $\vec{\mathrm{F}}_۱$ و $\vec{\mathrm{F}}_۲$ جسم ساکن باقی می‌ماند و با اعمال $\vec{\mathrm{F}}_۳$ در آستانه حرکت لغزشی قرار می‌گیرد. به نیروی اصطکاک بین سطوحی که نسبت به یکدیگر ساکن هستند(مانند سه شکل سمت چپ) نیروی اصطکاک ایستایی می‌گویند.
نکته: بیشترین مقدار نیروی اصطکاک ایستایی برابر است با کمترین نیروی لازم برای اینکه جسم در آستانه حرکت قرار بگیرد.



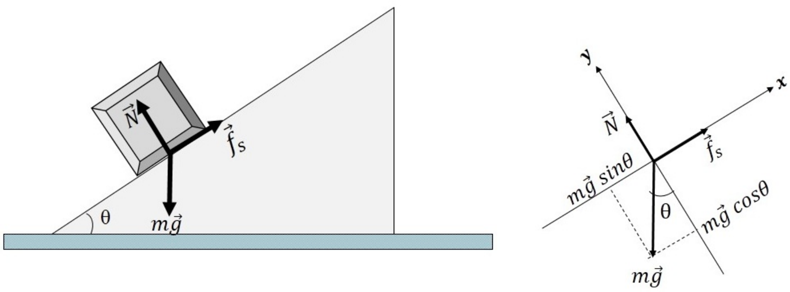
با شروع حرکت جسم، مشاهده می‌شود که نیروی اصطکاک نسبت به قبل کاهش می‌یابد ولی هم‌چنان وجود دارد و بر خلاف جهت حرکت جسم بر آن وارد می‌شود. نیروی اصطکاک بین سطوح متحرک نسبت به یکدیگر(مانند دو شکل سمت راست) را نیروی اصطکاک جنبشی می‌نامند. دانشمندان با انجام آزمایشات مختلف دریافتند که نیروی اصطکاک ایستایی با نیروی عمود بر سطح متناسب است و بر آن عمود است. ثابت تناسب را ضریب اصطکاک ایستایی می‌نامند و با μ_s نشان می‌دهند. بنابراین بیشترین مقدار نیروی اصطکاک ایستایی برای هر سطحی با ضریب اصطکاک ایستایی μ_s برابر است با $\mu_s N$ یعنی $f_s \leq \mu_s N$. ثابت تناسب نیروی اصطکاک جنبشی با نیروی عمود بر سطح را ضریب اصطکاک جنبشی می‌نامند و با μ_k نشان می‌دهند یعنی $f_k = \mu_k N$. بنابراین به تجربه دریافته‌اند که بیشترین مقدار f_s برابر $\mu_s N$ است هرچند ممکن است کمتر از این مقدار باشد ولی مقدار f_k همواره برابر $\mu_k N$ است.

نکته: برای هر سطحی معمولا $\mu_s > \mu_k$ است.

نکته: برای به حرکت درآوردن یک جسم روی یک سطح باید حداقل نیرویی مساوی با $\mu_s N$ به آن وارد کنیم تا شروع به حرکت کند و برای نیروهای کمتر از آن، جسم ساکن می‌ماند.

نکته: بر جسم در حال لغزش روی یک سطح، نیروی اصطکاک جنبشی وارد می‌شود ولی اگر جسم در حال لغزش نباشد نیروی اصطکاک ایستایی، بین سطوح عمل می‌کند.

مسئله: جسمی به جرم m روی یک سطح شیبدار با شیب θ قرار دارد. زاویه شیب را به تدریج زیاد می‌کنیم تا اینکه در $\theta = ۱۵^\circ$ لغزش جسم شروع شود. ضریب اصطکاک ایستایی بین سطح و جسم چقدر است؟ نیروهای وارد بر جسم را در شکل زیر نشان داده‌ایم. تا لحظه شروع لغزش، نیروی اصطکاک بین سطح و جسم از نوع ایستایی است و عمود بر $\vec{N}$. با تجزیه نیروها در راستای محورهای مختصات و به کار بردن قانون دوم نیوتن درست قبل از شروع حرکت جسم داریم:

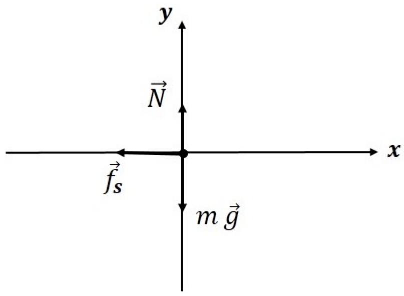


$$\sum \mathrm{F}_x = ۰ \Longrightarrow f_s - mg\sin\theta = ۰ \Longrightarrow f_s = mg\sin\theta$$
$$\sum \mathrm{F}_y = ۰ \Longrightarrow N - mg\cos\theta = ۰ \Longrightarrow N = mg\cos\theta$$

در زاویه $\theta = ۱۵^\circ$ که لغزش شروع می‌شود، نیروی f_s بیشترین مقدار ممکن را دارد که برابر $\mu_s N$ است. بنابراین به ازای $\theta = ۱۵^\circ$ داریم $f_s = \mu_s N$ و

$$f_s = \mu_s N = mg\sin ۱۵^\circ \Longrightarrow \mu_s(mg\cos ۱۵^\circ) = mg\sin ۱۵^\circ \Longrightarrow \mu_s = \tan ۱۵^\circ = /۲۷$$

مسئله: اتومبیلی با سرعت $۳۰ \frac{m}{s}$ روی جاده افقی در حال حرکت است. اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین لاستیک اتومبیل و سطح $/۶$ باشد کمترین مسافت لازم برای توقف اتومبیل چقدر است؟



اتومبیل را در مبدا مختصات در نظر می‌گیریم:

$$x_\circ = \circ \Longrightarrow \Delta x = x\ ; \quad \mathrm{v}_\circ = ۳۰\frac{m}{s}\ ; \quad \mathrm{v} = \circ$$
$$\mathrm{v}^۲ - \mathrm{v}_\circ^۲ = ۲a\Delta x \Longrightarrow x = -\frac{\mathrm{v}_\circ^۲}{۲a}$$

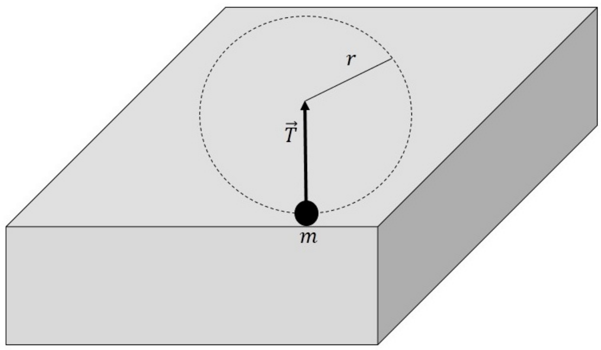
چون اتومبیل در نهایت متوقف می‌شود پس حرکت کندشونده است و شتاب منفی. بنابراین $x > \circ$ است.

$$\sum \mathrm{F}_x = ma \Longrightarrow -\mu_s N = ma \Longrightarrow a = \frac{-\mu_s N}{m} \qquad (۹)$$

هرگاه حاصل‌ضرب شتاب اتومبیل در جرمش از f_s کمتر شود، متوقف خواهد شد. بنابراین اگر شتاب حرکت اتومبیل از $\frac{-\mu_s N}{m}$ کمتر شود اتومبیل متوقف می‌شود و نیروی موتور اتومبیل برای حرکت کافی نیست چون نمی‌تواند بر اصطکاک غلبه کند. لازم است مقدار نیروی $\vec{N}$ را نیز به دست آوریم.

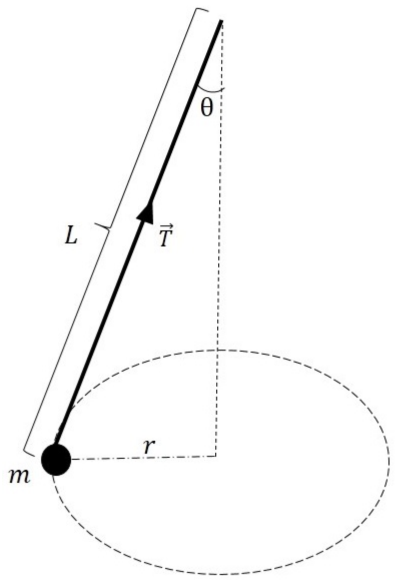
$$\sum \mathrm{F}_y = \circ \Longrightarrow N - mg = \circ \Longrightarrow N = mg$$
$$a = \frac{-\mu_s mg}{m} = -\mu_s g = -۵/۹\frac{m}{s^۲} \Longrightarrow x = \frac{-(۳۰)^۲}{۲(-۵/۹)} = ۷۶/۳m$$

دینامیک حرکت دایره‌ای یکنواخت: در فصل چهارم دیدیم جسمی که در یک مسیر دایره‌ای به شعاع r با سرعت ثابت v حرکت می‌کند دارای شتابی به اندازه $\frac{\mathrm{v}^۲}{r}$ و به سمت مرکز دایره است. بنابراین چنین جسمی دارای نیروی خالصی با اندازه $\sum \mathrm{F} = m\frac{\mathrm{v}^۲}{r}$ در جهت شتاب است که به آن نیروی مرکزگرا می‌گویند چون جهت آن همواره به سمت مرکز است. نیروی مرکزگرا، نیروی جدیدی نیست بلکه هر کدام از انواع نیروهایی که تاکنون شناخته‌ایم(نیروی کشش، نیروی عمود بر سطح، نیروی اصطکاک و ...) می‌تواند عامل به وجود آمدن نیروی مرکزگرا باشد. مثلا جسمی که به یک ریسمان بسته شده و سر دیگر ریسمان روی یک میز بدون اصطکاک بسته شده است و می‌چرخد را در نظر بگیرید:



در این شکل، نیروی مرکزگرا را نیروی کشش ریسمان تامین می‌کند(به نیروی کشش در این مورد نیروی مرکزگرا می‌گویند پس نیروی مرکزگرا نیروی جدیدی نیست). یعنی $T = \frac{m\mathrm{v}^۲}{r}$. به عنوان مثالی دیگر ماه در یک مسیر دایره‌ای به دور زمین می‌چرخد. بنابراین ماه دارای نوعی نیروی مرکزگراست. این نیروی مرکزگرا توسط نیروی گرانش زمین تامین می‌شود. یا لباس‌هایی که درون ماشین لباسشویی در حال چرخش هستند نیز دارای نیروی مرکزگرا هستند که توسط نیروی موتور ماشین لباسشویی به وجود آمده است.

مسئله: آونگ مخروطی از جسمی به جرم m که به طنابی به طول L متصل است و با سرعت ثابت روی یک دایره افقی می‌گردد(سر دیگر طناب بالای صفحه دایره بسته شده است) تشکیل شده است. زمان تناوب یعنی زمانی که طول می‌کشد تا جسم یک دور کامل در مسیر دایره بچرخد را به دست آورید.



اگر زاویه ریسمان با راستای قائم را θ در نظر بگیریم: $r = L\sin\theta$
از شکل روبرو پیداست که مولفه افقی نیروی کشش $\vec{T}$ عامل به وجود آمدن نیروی مرکزگراست و چون جسم در راستای محور y حرکتی ندارد:

$$\sum \mathrm{F}_y = \circ \Longrightarrow T\cos\theta - mg = \circ \Longrightarrow T = \frac{mg}{\cos\theta}$$
$$\sum \mathrm{F}_x = \frac{m\mathrm{v}^{۲}}{r} \Longrightarrow T\sin\theta = \frac{m\mathrm{v}^{۲}}{r}$$

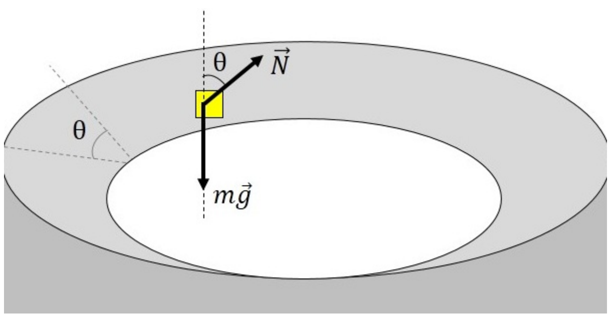
از تقسیم دو رابطه اخیر نتیجه می‌گیریم که:

$$\frac{T\sin\theta}{T\cos\theta} = \frac{m\frac{\mathrm{v}^{۲}}{r}}{mg} \Longrightarrow \mathrm{v} = \sqrt{rg\tan\theta}$$

مسافتی که جسم در یک دور کامل می‌پیماید برابر است با $۲\pi r$. بنابراین زمانی که این مسافت یعنی یک دور کامل را طی می‌کند برابر است با:

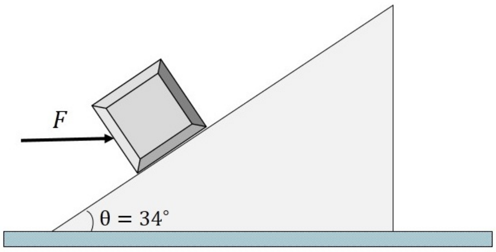
$$\mathrm{v} = \frac{۲\pi r}{t} \Longrightarrow t = \frac{۲\pi r}{\mathrm{v}} = \frac{۲\pi r}{\sqrt{rg\tan\theta}} \xrightarrow{r=L\sin\theta} t = ۲\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}$$

جاده با شیب عرضی: فرض کنید اتومبیلی در یک مسیر دایره‌ای در حرکت است. بر این اتومبیل نیروهای وزن و عمود بر سطح وارد می‌شوند. اما برای اینکه این اتومبیل حرکت دایره‌ای خود را حفظ کند و همواره در مسیر دایره‌ای بماند باید یک نیروی مرکزگرا بر آن وارد شود. چون در غیر این‌صورت شتاب مرکزگرا ندارد و از مسیر دایره‌ای منحرف می‌شود. این نیرو در مسیرهای معمولی توسط نیروی اصطکاک بین لاستیک و جاده تامین می‌شود ولی برای برخی جاده‌ها این نیروی اصطکاک برای تامین نیروی مرکزگرا کافی نیست. بنابراین سر پیچ‌ها، جاده‌ها را مانند شکل زیر، شیبدار می‌سازند زیرا در این شرایط نیروی عمود بر سطح دو مولفه دارد که مولفه افقی آن تامین کننده نیروی مرکزگرا خواهد بود(حتی اگر اصطکاک وجود نداشته باشد). برای به دست آوردن شیب مناسب(با فرض اینکه نیروی اصطکاکی درکار نیست) از قانون دوم نیوتن کمک می‌گیریم.

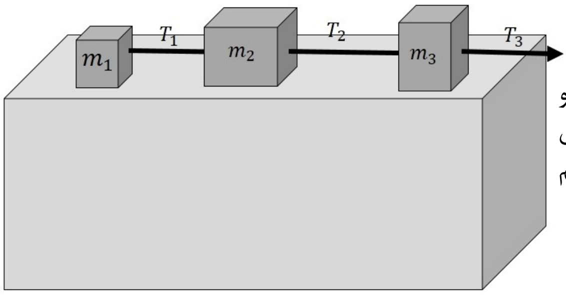


$$\sum \mathrm{F}_y = ma_y = \circ \Longrightarrow N\cos\theta - mg = \circ \Longrightarrow N = \frac{mg}{\cos\theta}$$
$$\sum \mathrm{F}_x = ma_x = m\frac{\mathrm{v}^{۲}}{r} \Longrightarrow N\sin\theta = \frac{m\mathrm{v}^{۲}}{r}$$

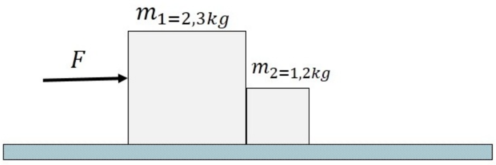
از تقسیم دو معادله بر یکدیگر داریم: $\tan\theta = \frac{\mathrm{v}^{۲}}{rg}$. از نتیجه نهایی پیداست که شیب به سرعت و شعاع خمش مسیر بستگی دارد یعنی هر پیچی را باید با سرعت مناسبی دور زد وگرنه از مسیر منحرف خواهیم شد.
تمرین:
۱ــ آسانسوری به جرم $۱۶۰۰kg$ با سرعت $۱۲\frac{m}{s}$ به سمت پایین حرکت می‌کند و پس از پیمودن مسافت $۴۲m$ متوقف می‌شود. کشش کابل آسانسور طی مدتی که متوقف می‌شود چقدر است؟
۲ــ گردونه وسیله‌ای استوانه‌ای شکل است که افراد درون آن قرار می‌گیرند و به دیواره تکیه می‌دهند در حالی که پایشان روی یک سکوی متصل به بدنه است. سپس استوانه شروع به گردش می‌کند و در یک سرعت مناسب سکو را از زیر پای افراد جمع می‌کنند. بنابراین شخص که به بدنه تکیه داده و درواقع آویزان است به دور محور استوانه می‌چرخد. در گردونه‌ای به شعاع r، کمترین سرعتی که می‌تواند شخص را میخکوب نگه دارد و مانع از سقوطش شود چقدر است؟



۳– صندوقی به جرم $۱۱۰kg$ را با سرعت ثابت روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی هل می‌دهیم. (الف) نیروی افقی لازم برای این کار(F) چقدر است؟ (ب) نیرویی که سطح شیبدار بر صندوق وارد می‌کند چقدر است؟

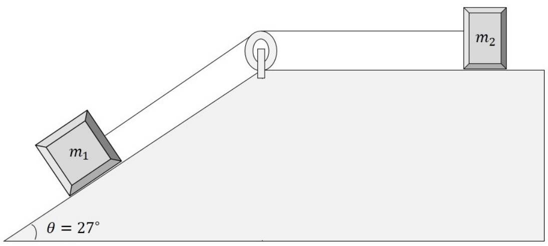


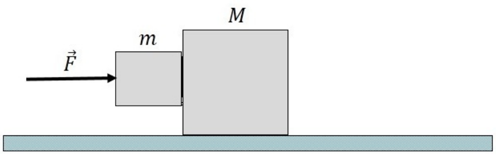
۴– سه جسم به جرم‌های $m_۱ = ۱/۲kg$، $m_۲ = ۲/۴kg$ و $m_۳ = ۳/۱kg$ روی سطح افقی بدون اصطکاکی قرار دارند که با نیروی $T_۳ = ۶/۵N$ به طرف راست کشیده می‌شوند. مقادیر شتاب سیستم و نیروهای کشش $T_۱$ و $T_۲$ را به دست آورید.



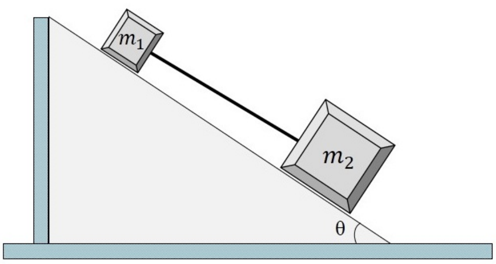
۵– به سیستم شکل مقابل نیروی افقی $F = ۳/۲N$ وارد می‌شود.(از نیروی اصطکاک بین سطوح چشم‌پوشی کنید) نیروی تماسی بین دو جسم چقدر خواهد بود؟ (ب) اگر همین نیرو را به جای $m_۱$ به $m_۲$ وارد کنیم، نیروی تماسی بین دو جسم چقدر خواهد شد؟

۶– در شکل زیر $m_۱ = ۴/۲kg$ و $m_۲ = ۲/۳kg$ هستند و ضریب اصطکاک جنبشی بین $m_۲$ و سطح افقی ۰/۴۷ است. سطح شیبدار بدون اصطکاک است. شتاب اجسام و کشش نخ را به دست آورید.



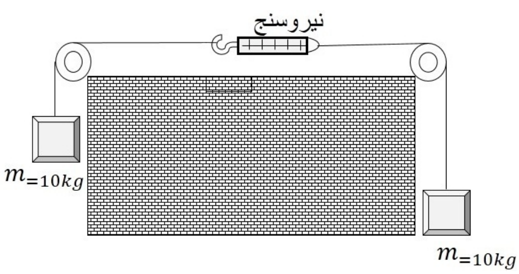


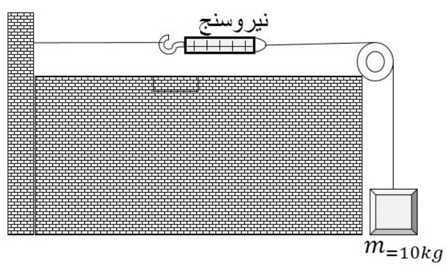
۷– در شکل مقابل $m = ۱۶kg$ و $M = ۸۸kg$ است. ضریب اصطکاک ایستایی بین دو جسم ۰/۳۸ است. اما M با سطح زیرینش اصطکاک ندارد. حداقل نیروی افقی F که به ازای آن m نسبت به M ساکن است را به دست آورید.



۸– در سیستم روبرو $m_۱ = ۱/۶۵kg$ و $m_۲ = ۳/۲۲kg$ و $\theta = ۳۰°$ هستند و میله‌ای که دو جسم را به یکدیگر وصل کرده است موازی سطح است. این مجموعه به طرف پایین سطح شیبدار می‌لغزد. اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین $m_۱$ و سطح شیبدار ۰/۲۳ و بین $m_۲$ و سطح شیبدار ۰/۱۳ باشد شتاب حرکت اجسام و کشش میله را به دست آورید.

۹– در هر کدام از شکل‌های زیر، نیروسنج چه عددی را نشان می‌دهد؟





فصل ششم

ترمودینامیک

تا کنون مکانیک ذرات را بررسی کردیم ولی گاهی محیط مورد بررسی از تعداد بسیار زیادی از ذرات تشکیل شده است که باید تک‌تک آن‌ها را بررسی کرد . چنین امری دشوار است. بنابراین برای محیط هایی با تعداد ذرات بسیار زیاد از علم مکانیک آماری کمک می‌گیریم. یعنی مکانیک تعداد زیادی از ذرات را به صورت آماری بررسی می‌کنیم. به عنوان مثال هر لیتر گاز ، حاوی 3×10^{22} مولکول است که باید سرعت برخوردشان به دیواره ظرفی که در آن قرار دارند و تبادل انرژی بین آن‌ها و دیواره را از روی سرعت و مکان اولیه‌شان به دست آورد و در نهایت میانگین هر کمیت را برای تعداد زیادی از ذرات در نظر می‌گیریم.
کمیت‌های ماکروسکوپیک: کمیت‌هایی از سیستم شامل ذرات که می‌توان مستقیما به وسیله ابزارهای آزمایشگاهی اندازه گرفت را کمیت‌های ماکروسکوپیک می‌نامند مانند دما، حجم، فشار و ....
کمیت‌های میکروسکوپیک: کمیت‌هایی از سیستم هستند که با دانستن آن‌ها می‌توان کمیت‌های ماکروسکوپیک را به دست آورد. مانند نیروی میانگینی که ذرات یک لیتر گاز محبوس به دیواره ظرفشان وارد می‌کنند و منجر به اندازه‌گیری فشار گاز می‌شود یا میانگین سرعت مولکول‌های گاز که منجر به اندازه‌گیری انرژی درونی آن می‌شود.
نکته: علمی که ارتباط بین کمیت‌های ماکروسکوپیک را به دست می‌آورد، علم ترمودینامیک می‌نامند.
تعادل گرمایی: اگر دو سیستم A و B که منزوی هستند(با محیط اطرافشان تبادل انرژی و ماده ندارند) را در تماس با یکدیگر قرار دهیم، برخی خواص ماکروسکوپی این دو سیستم تغییر می‌کند تا جایی که خواص هر دو برابر شود و دیگر تغییری رخ ندهد. در این حالت دو سیستم در تعادل گرمایی هستند.
نکته: علم مکانیک آماری و ترمودینامیک، سیستم‌ها را در حالت تعادل گرمایی بررسی می‌کنند نه در حالت تبادل انرژی یا ماده با محیط‌های مجاورشان[1]. بنابراین باید ابتدا از اینکه دو سیستم در تعادل گرمایی هستند یا خیر مطلع شویم. اما چگونه؟ گاهی اطلاع از تعادل گرمایی دو سیستم به سادگی ممکن نیست. مثلا اگر سیستمی خیلی بزرگ باشد و نتوانیم آن را جابه‌جا کنیم و در تماس با سیستم دیگر قرار دهیم تا تعادل را آزمایش کنیم به مشکل برمی‌خوریم. حتی ممکن است فاصله مکانی دو سیستم از یکدیگر بسیار زیاد باشد. از این رو دانشمندان برای غلبه بر چنین مشکلاتی راهکاری ارائه دادند:
اگر هر کدام از سیستم‌های A و B با سیستم دیگری مانند C در تعادل گرمایی باشند آن‌گاه خود سیستم‌های A و B نیز با یکدیگر در تعادل گرمایی هستند[2].
دما: کمیت از سیستم است که شرط تعادل گرمایی دو سیستم را تعیین می‌کند. یعنی اگر سیستم A با B در تعادل گرمایی باشند آن‌گاه دمای آن‌ها با یکدیگر برابر است و برعکس. این تعریف دما را به عنوان قانون صفرم ترمودینامیک در نظر می‌گیرند.
نکته: در راهکاری که برای غلبه بر مشکلات ناشی از اندازه و فاصله زیاد سیستم‌ها از یکدیگر ارائه شد سیستم C درواقع دماسنج است که نقش واسط بین سیستم‌های A و B را ایفا می‌کند. از قانون صفرم ترمودینامیک نتیجه می‌گیریم که اگر دماسنج C در تماس با A همان عددی را نشان بدهد که در تماس با B نیز نشان می‌دهد آن‌گاه سیستم‌های A و B هم‌دما بوده و با یکدیگر در تعادل گرمایی هستند(یعنی اگر آن‌ها را با یکدیگر تماس دهیم، دمایشان تغییر نمی‌کند).
اندازه‌گیری دما: برای اندازه‌گیری دمای یک سیستم و نسبت دادن یک عدد به آن به عنوان دما، از راهکار زیر بهره می‌بریم:
از سیستمی که قصد داریم دمایش را اندازه بگیریم یک خاصیتش را که با تغییر دما تغییر می‌کند در نظر می‌گیریم مثل حجم، فشار، طول و یا هر خاصیتی از آن ماده که وابسته به دما باشد. کمیت مربوط به آن خاصیت را با x نشان می‌دهیم بنابراین دمای سیستم تابعی از x است و برعکس. برای ارتباط این دو به یکدیگر، یک تابع خطی در نظر می‌گیریم. یعنی تابع دمای هر سیستم برحسب کمیت x از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$T(x) = ax + b \tag{1}$$

با تعیین مقادیر a و b می‌توانیم دمای سیستم را با استفاده از مقدار x سیستم به دست آوریم. برای تعیین a و b دو مقدار مشخص از x مانند x_1 و x_2 که دمای آن‌ها را به ترتیب T_1 و T_2 فرض کرده‌ایم انتخاب می‌کنیم. برای مثال در دماسنج‌های جیوه‌ای، کمیت x درواقع حجم حجم جیوه درون لوله دماسنج است و x_1 و x_2 را به ترتیب نقطه انجماد و جوش آب با دماهای $T_1 = 0^\circ C$ و $T_2 = 100^\circ C$ در نظر می‌گیرند. بنابراین با جایگذاری این مقادیر، می‌توان a و b را تعیین نمود و دما را برای هر مقدار x از رابطه (۱) به دست آورد.
در مقیاس فارنهایت که درجه‌بندی آن از سلسیوس کوچک‌تر است x_1 را نقطه انجماد مخلوط آب و نمک با دمای $T = 32^\circ F$ و x_2 را حالت طبیعی بدن انسان با دمای $T = 212^\circ F$ در نظر می‌گیرند و درجه‌بندی را بر این اساس انجام می‌دهند. بنابراین برای تبدیل مقیاس سلسیوس به فارنهایت یا برعکس از رابطه $(T_F = \frac{9}{5}T_C + 32)$ استفاده می‌کنیم.
در مقیاس کلوین که به عنوان مقیاس مبنا انتخاب شده است دمای نقطه $x_1 = 0$ را برابر صفر در نظر می‌گیرند. در نتیجه در رابطه

[1] در مقاطع تحصیلی بالاتر چنین سیستم‌هایی بررسی می‌شوند.
[2] این قانون بدیهی نیست. فرض کنید A، B و C سه شخص باشند که A و B هر دو شخص Cرا می‌شناسند ولی لزومی ندارد که A و B همدیگر را نیز بشناسند.

(۱) با قرار دادن ($x = ۰, T = ۰$) مقدار b را صفر به دست می‌آوریم. بنابراین $T(x) = ax$. نقطه $x_۲$ را مخلوطی از آب و یخ و بخار آب با دمای $T = ۲۷۳/۱۶K$ درنظر می‌گیرند. اگر مقدار کمیت x در این دما را با x_{tr} نشان دهیم:

$$T(x_{tr}) = ۲۷۳/۱۶K \Longrightarrow a = \frac{۲۷۳/۱۶}{x_{tr}} \Longrightarrow T(x) = ۲۷۳/۱۶\frac{x}{x_{tr}}$$

نکته: دمای مخلوط آب و یخ و بخار آب در مقیاس سلسیوس، صفر درجه است. بنابراین برای تبدیل دمای سلسیوس به کلوین و برعکس از رابطه ($T_C = T_K - ۲۷۳/۱۶$) کمک می‌گیریم.

مسئله: دمای یک اتاق $۲۰^\circ C$ است. این دما در مقیاس فارنهایت و کلوین چقدر است؟

$$T_C = ۲۰^\circ C \Longrightarrow T_F = \frac{۹}{۵}T_C + ۳۲ = ۶۸^\circ F \; ; \; T_K = T_C + ۲۷۳/۱۶ = ۲۹۳/۱۶K$$

مسئله: دمای $۰^\circ F$ برحسب سلسیوس و کلوین چقدر است؟

$$T_F = ۰^\circ F \Longrightarrow T_C = \frac{۵}{۹}(T_F - ۳۲) = \frac{۵}{۹}(۰ - ۳۲) = -۱۷/۸^\circ C \; ; \; T_K = T_C + ۲۷۳/۱۶ = ۲۵۵/۳۶K$$

مسئله: دمای $-۱۲/۸۴K$ در مقیاس سلسیوس و فارنهایت چقدر خواهد بود؟

$$T_K = -۱۲/۸۴K \Longrightarrow T_C = T_K - ۲۷۳/۱۶ = -۲۸۶^\circ C \; ; \; T_F = \frac{۹}{۵}T_C + ۳۲ = -۴۸۲/۸^\circ F$$

گاز کامل: تقسیم‌بندی‌های اخیر برای دماسنج‌ها به کمیت x و نوع ماده درون دماسنج بستگی دارد و هر دماسنجی ممکن است مقداری متفاوت برای دمای یک سیستم به دست بدهد. مثلا فرض کنید در دو دماسنج که کمیت متغیر با دما در آن‌ها را فشار در نظر گرفته‌ایم یکی را از جیوه پرکنیم و دیگری را از الکل. از آنجا که فشار مایعات به چگالی جرمی آن‌ها وابسته است پس هر کدام از این دماسنج‌ها برای یک سیستم ثابت و مشخص دماهای متفاوتی را نشان می‌دهند که اختلاف زیادی با یکدیگر دارند. از این رو لازم است دماسنجی با ماده و کمیت متغیر با دمای مشخصی در نظر بگیرند که با تغییر جنس ماده، اختلاف دمایی که دو دماسنج نشان می‌دهند کاهش یابد. دانشمندان پی بردند که اگر مخلوطی از گازها با حجم ثابت را به عنوان ماده و فشار آن‌ها را به عنوان کمیت متغیر با دما در نظر بگیریم به شرطی که فشار گاز در نقطه‌ی سه گانه به صفر میل کند[۳] می‌توان دماسنج‌هایی ساخت که یک درجه بندی آن‌ها به عنوان استاندارد دما به کار رود. بنابراین مقیاس دمای گاز کامل به این صورت است:

$$T = ۲۷۳/۱۶ \lim_{P_{tr} \to ۰} \frac{P}{P_{tr}}$$

نکته: این مقیاس دمایی اگر چه به خواص یک گاز خاص بستگی ندارد ولی به خواص کلی گازها(به عنوان گاز کامل) بستگی دارد. بنابراین در فصل‌های بعد مقیاسی ارائه می‌دهیم که مستقل از خواص ماده‌ی در نظر گرفته شده‌ی درون دماسنج باشد.

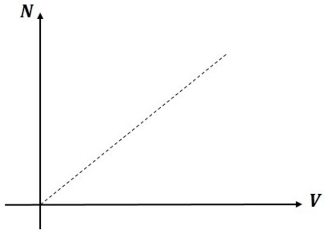
مسئله: اگر فشار یک گاز کامل در نقطه‌ی سه‌گانه آب $۳ \times ۱۰^{-۵}pa$ باشد. دمای آن گاز در فشار $۴pa$ چند کلوین است؟

$$P_{tr} = ۳ \times ۱۰^{-۵}pa \; ; \; T = ۲۷۳/۱۶ \lim_{P_{tr} \to ۰} \frac{P}{P_{tr}} \Longrightarrow T(P = ۴) = ۳۶۴/۲ \times ۱۰^۵K$$

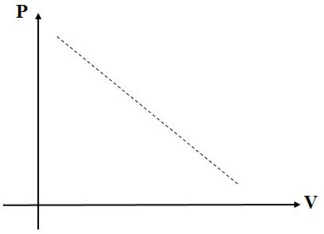
[۳] چون با اعمال این شرط، اختلاف دمایی که توسط دو دماسنج با گازهای مختلف اندازه‌گیری می‌شود بسیار کم است.

قانون اول و دوم ترمودینامیک

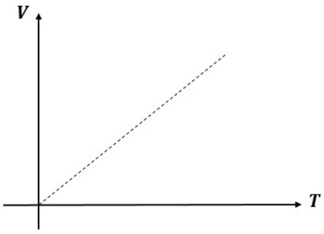
معادله حالت: یک رابطه ریاضی است که ارتباط بین کمیت‌های ترمودینامیکی فشار(P)، حجم(V)، تعداد مولکول‌ها(N) و دمای(T) برای هر سیستمی شامل گاز کامل را مشخص می‌کند. اولین بار این معادله به صورت تجربی به دست آمد که مبتنی بر آزمایشات دانشمندان مختلف بود:



۱− آزمایش آووگادرو: سیستمی شامل گاز کامل که در ظرفی محبوس است را مهیا کرده و اجازه می‌دهیم که خواص ترمودینامیکی سیستم تغییر کند. اگر دما و فشار این سیستم گازی ثابت باشند و تغییر نکنند آن‌گاه تغییرات حجم سیستم در اثر تغییر تعداد ذرات به شکل روبرو خواهد بود. یعنی $V \propto N$ و یا اینکه $V = \lambda N$ که در آن λ یک عدد ثابت است.



۲− آزمایش بویل: اگر در سیستم قبل مقادیر T و N را ثابت نگه داریم و فشار سیستم را تغییر دهیم آن‌گاه حجم آن نیز در اثر تغییر فشار، تغییر خواهد کرد. چگونگی تغییرات حجم سیستم در اثر این تغییر فشار در هر لحظه به شکل روبرو خواهد بود. یعنی $P \propto \frac{1}{V}$ یا $P = \frac{\lambda'}{V}$ که λ' یک عدد ثابت است.



۳− آزمایش گی-لوساک: اگر فشار و تعداد ذرات سیستم را ثابت نگه داریم آن‌گاه تغییرات حجم در اثر تغییر دما از شکل روبرو پیروی می‌کند. به عبارت دیگر $V \propto T$ و یا اینکه $V = \lambda'' T$ که λ'' نیز یک عدد ثابت است.

اکنون می‌توانیم سه رابطه اخیر را در یک رابطه جمع‌بندی کنیم که به معادله حالت معروف است.

$$\frac{PV}{NT} = k$$

که k یک عدد ثابت است. پیداست اگر P و T ثابت باشند $V = (\frac{kT}{P})N = \lambda N$ خواهد بود که همان قانون آووگادروست. اگر N و T ثابت باشند داریم $P = (\frac{kNT}{V}) = \frac{\lambda'}{V}$ که قانون بویل است و اگر P و N ثابت باشند $V = (\frac{kN}{P})T = \lambda'' T$ که به قانون گی-لوساک منجر می‌شود.

می‌دانیم که تعداد مول‌های یک گاز برابر است با نسبت تعداد مولکول‌ها به عدد اووگادرو. یعنی $n = \frac{N}{N_A}$. بنابراین $\frac{PV}{nT} = N_A k$. چون N_A یک مقدار ثابت است در نتیجه حاصل‌ضرب $N_A k$ نیز عددی ثابت است. این ثابت را با R نشان می‌دهند و به نام ثابت جهانی گازها معروف است و برای هر نوع گازی، یک مقدار ثابت دارد که برابر است با $R = ۸/۳۱۴ \frac{J}{mol.K}$. بنابراین معادله حالت گاز کامل بر حسب تعداد مول‌هایش عبارت است از:

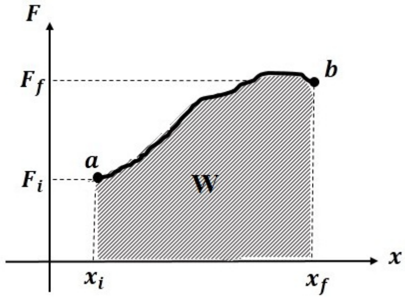
$$PV = nRT \quad (۱)$$

نکته: گازهای واقعی در چگالی‌های پایین به گاز کامل تبدیل می‌شوند.

کار انجام شده روی یک سیستم شامل گاز کامل: تعریف کار در علم فیزیک با برداشت روزمره مردم از کار متفاوت است. در فیزیک اگر به جسمی نیروی $\vec{\mathrm{F}}$ را اعمال کنیم، در صورتی که جسم جابه‌جا شود کار انجام شده است. کار یک کمیت اسکالر بر حسب یکای ژول(J) است و بنا به تعریف، مقدارش از ضرب داخلی بردار نیرو در بردار جابه‌جایی جسم به دست می‌آید.

$$W = \vec{\mathrm{F}} \cdot \Delta\vec{x} \quad (۲)$$

اگر نیروی $\vec{\mathrm{F}}$ در تمام طول مسیر، ثابت نباشد و در هر بخشی مقدار متفاوتی داشته باشد، مسیر حرکت را به جزءهای کوچکی تقسیم می‌کنیم. به طوری که بتوان در هر کدام از این جزءها مقدار نیرو را ثابت در نظر گرفت. سپس کار هر کدام از این جزءها را به دست آورده و در نهایت مجموع کار تمام جزءها را به عنوان کار برآیند در نظر می‌گیریم. مثلا اگر در شکل زیر با اعمال نیروی $\vec{\mathrm{F}}$ که تابع مکان(x) جسم در هر نقطه از مسیر حرکتش است، جسم را از a تا b جابه‌جا کنیم در جزءای به طول dx از مسیر حرکت، مقدار کار برابر است با $dW = \vec{\mathrm{F}} \cdot d\vec{x}$. اگر کار مربوط به همه جزءهای کوچک را با یکدیگر جمع کنیم داریم:



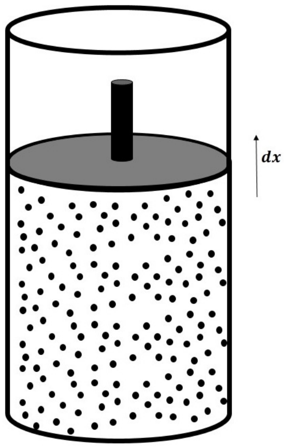
شکل ۱: نمودار نیرو بر حسب جابه‌جایی

$$\int dW = \int_a^b \vec{\mathrm{F}} \cdot d\vec{x} \Longrightarrow W = \int_a^b \vec{\mathrm{F}} \cdot d\vec{x}$$

نکته: اگر نیرو و جابه‌جایی هم‌جهت باشند کار مثبت است. چون در این صورت زاویه بین $\vec{\mathrm{F}}$ و $d\vec{x}$ صفر خواهد بود و اگر جسم در خلاف جهت نیرو جابه‌جا شود کار منفی است.

نکته: طبق تعریف انتگرال می‌دانیم که $\int_a^b \vec{\mathrm{F}} \cdot d\vec{x}$ برابر است با مساحت زیر منحنی تابع $F(x)$ از نقطه a تا b. یعنی مساحت زیر مسیر نشان داده شده در شکل (۱) از نقطه a تا b.

فرض کنید مقداری گاز را درون ظرفی استوانه‌ای که درب آن(با مساحت A) را می‌توان به راحتی به بالا یا پایین حرکت داد مطابق شکل زیر وارد کرده‌ایم.



اگر دمای گاز را افزایش دهیم، گاز منبسط می‌شود و درب ظرف به بالا حرکت می‌کند. یعنی نیرویی که مولکول‌های گاز به درب ظرف وارد کرده‌اند سبب انجام کار(جابه‌جایی درب) شده است. طبق قانون سوم نیوتن درب ظرف نیز نیرویی مساوی و در خلاف جهت به مولکول‌های گاز وارد می‌کند. مقدار کار انجام شده توسط درب ظرف روی مولکول‌های گاز برابر است با[۱]:

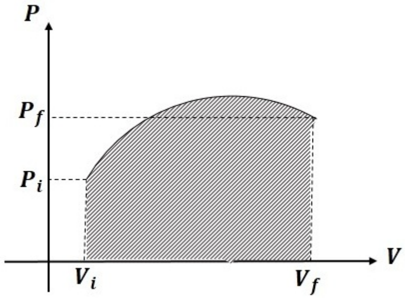
$$W = \int \vec{\mathrm{F}} \cdot d\vec{x} = -\int PA\, dx$$

علامت منفی ناشی از تعریف ضرب داخلی است چون نیروی $\vec{\mathrm{F}}$ که درب ظرف به مولکول‌ها وارد می‌کند به سمت پایین است در حالی‌که جابه‌جایی درب به سمت بالاست. یعنی $\vec{\mathrm{F}}$ و $d\vec{x}$ در خلاف جهت یکدیگرند و کار منفی خواهد بود. از طرفی کمیت $A\, dx$ درواقع تغییر حجم گاز در اثر این انبساط است. بنابراین $A\, dx = dV$ و در نتیجه:

$$W = -\int PdV \tag{۳}$$

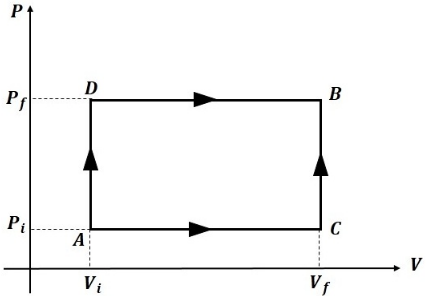
اگر منحنی تغییرات فشار بر حسب تغییر حجم یک سیستم شامل گاز کامل را روی یک نمودار که محور قائم بیانگر فشار و محور افقی بیانگر حجم است(نمودار $P-V$) در اختیار داشته باشیم آن‌گاه می‌توانیم کاری که روی گاز(سیستم) انجام شده است را با محاسبه مساحت محصور زیر منحنی نیز به دست آوریم. به عبارت دیگر در شکل زیر مساحت قسمت هاشور خورده برابر کار انجام شده طی یک فرآیند روی گاز است.

[۱] چون طبق تعریف، فشار برابر است با نسبت نیروی وارده بر مساحت. یعنی $P = \frac{\mathrm{F}}{A}$.



نکته: از رابطه (۳) پیداست که اگر سیستم مورد نظرمان منبسط شود یعنی حجمش افزایش یابد($dV > ۰$) کار منفی است و اگر سیستم منقبض شود(مولکول‌های گاز متراکم شوند) یعنی $dV < ۰$ باشد کار انجام شده روی سیستم، مثبت است.

مسئله: طبق شکل روبرو سیستمی از گاز کامل را از حالت تعادل $A(P_i, V_i)$ به حالت تعادل $B(P_f, V_f)$ می‌رسانیم. کار انجام شده در هر کدام از مسیرهای نشان داده شده در شکل را به دست آورید.



اگر سیستم را از طریق مسیر ADB از نقطه A به B برسانیم آن‌گاه کار انجام شده در مسیر AD صفر است چون حجم در این مسیر تغییری نمی‌کند ($dV = ۰$). در مسیر DB مقدار کار انجام شده روی سیستم برابر است با:

$$W_{DB} = -\int P_f dV = -P_f(V_f - V_i)$$

که این مقدار برابر است با مساحت زیر نمودار DB که مستطیلی است به عرض P_f و طول $V_f - V_i$. بنابراین کل کار انجام شده روی سیستم در مسیر ADB برابر است با $W_{AD} + W_{DB} = ۰ - P_f(V_f - V_i)$. اگر سیستم از طریق مسیر ACB تغییر شرایط بدهد مقدار کار متفاوت خواهد بود.

$$W_{AC} = -P_i(V_f - V_i) \equiv AC \text{ مساحت مستطیل زیر مسیر}$$
$$W_{CB} = ۰ \Longrightarrow W_{\text{کل}} = W_{AC} + W_{CB} = -P_i(V_f - V_i)$$

انواع فرآیندهای ترمودینامیکی: اگر سیستمی شامل مولکول‌های گاز کامل را در اختیار داشته باشیم و بخواهیم کمیت‌های موجود در معادله حالت یعنی P، V و T را تغییر دهیم به چندین روش می‌توانیم این تغییرات را انجام دهیم.

۱− فرآیند تک‌حجم: اگر در حین یک فرآیند، حجم سیستم ثابت بماند فرآیند تک‌حجم نامیده می‌شود. پیداست که کار انجام شده روی مولکول‌های گاز در چنین فرآیندی صفر است. چون $dV = ۰$ و طبق رابطه (۳) کار برابر صفر خواهد بود. مانند مسیرهای AD و CB در مسئله قبل.

۲− فرآیند تک‌فشار: اگر طی یک فرآیند، فشار سیستم حاوی گاز کامل ثابت بماند فرآیند را تک‌فشار می‌نامند. کار انجام شده روی یک سیستم در یک فرآیند تک‌فشار مانند مسیر AC و DB در مسئله قبل برابر است با $W = -P(V_f - V_i)$ که در آن V_i حجم اولیه سیستم و V_f حجم نهایی سیستم است.

۳− فرآیند تکدما: فرآیندی است که طی آن دمای گاز ثابت نگه داشته می‌شود. از معادله حالت پیداست برای یک فرآیند تکدما مقدار PV ثابت است. بنابراین نمودار $P - V$ مربوط به فرآیند تکدما به شکل هذلولی خواهد بود. کار انجام شده روی سیستم در فرآیند تکدما برابر است با:

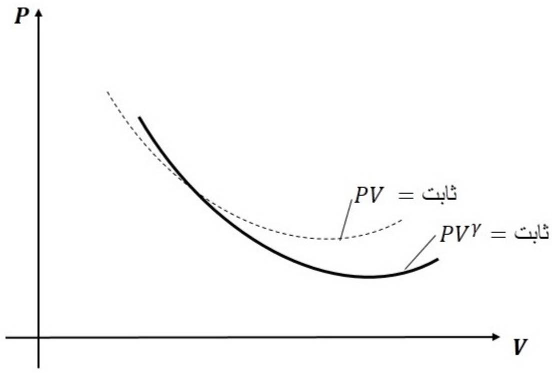
$$W = -\int_{V_i}^{V_f} P\, dV = -\int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V}\, dV = -nRT\, Ln\frac{V_f}{V_i}$$

از این رابطه پیداست که کاری که برای منبسط کردن یک گاز کامل طی یک فرآیند تکدما روی سیستم انجام می‌دهیم منفی است(در انبساط تکدما، سیستم روی محیط کار انجام می‌دهد) و کار لازم برای تراکم گاز، مقداری مثبت است(برای تراکم تکدما باید روی گاز کار انجام دهیم).

۴− فرآیند بی‌دررو: فرآیندی که طی آن هیچ گرمایی به درون ظرف حاوی گاز وارد و یا از آن خارج نمی‌شود را فرآیند بی‌دررو می‌نامند. در یک فرآیند بی‌دررو ضمن منبسط کردن گاز همواره کمیت PV^γ دارای مقدار ثابتی است[۲] که γ نسبت گرمای ویژه نامیده می‌شود و همواره بزرگ‌تر از واحد است. نمودار $P - V$ی چنین فرآیندی نیز یک هذلولی است که شیب آن از شیب نمودار فرآیند تکدمای مشابه‌اش بیشتر است. بنابراین سطح زیر نمودار و در نتیجه کار بی‌دررو نسبت به تکدما کمتر است.

بنابراین اگر حجم و فشار گاز را طی یک فرآیند بی‌دررو از V_i و P_i ضمن منبسط کردن گاز به V_f و P_f برسانیم آن‌گاه $P_iV_i^\gamma =$

[۲] این رابطه را می‌توان به کمک قانون اول ترمودینامیک اثبات کرد.



و در تمام نقاط میانی این فرآیند داریم $PV^\gamma = P_iV_i^\gamma$ و در نتیجه فشار در هر نقطه از مسیر فرآیند برابر است با $P = \frac{P_iV_i^\gamma}{V^\gamma}$. بنابراین کار انجام شده روی سیستم در فرآیند بی‌دررو برابر است با:

$$
\begin{aligned}
W &= -\int_{V_i}^{V_f} P\,dV = -\int_{V_i}^{V_f} \frac{P_iV_i^\gamma}{V^\gamma}dV = -P_iV_i^\gamma\left(\frac{V_f^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{V_i^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right) \\
&= \frac{P_iV_i^\gamma}{1-\gamma}\left(V_i^{1-\gamma} - V_f^{1-\gamma}\right) = \frac{P_iV_i}{1-\gamma}\left[1 - \left(\frac{V_f}{V_i}\right)^{1-\gamma}\right] \\
&= \frac{P_iV_i}{1-\gamma}\left[1 - \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{1}{1-\gamma}\left(P_iV_i - \frac{P_iV_i^\gamma}{V_f^{\gamma-1}}\right) \\
&\xrightarrow{P_iV_i^\gamma = P_fV_f^\gamma} W = \frac{1}{1-\gamma}\left(P_iV_i - \frac{P_fV_f^\gamma}{V_f^{\gamma-1}}\right) = \frac{1}{\gamma-1}\left(P_fV_f - P_iV_i\right)
\end{aligned}
$$

از رابطه اخیر درمی‌یابیم که اگر گازی را از طریق یک فرآیند بی‌دررو منبسط کنیم، کار منفی خواهد بود و در تراکم، کار مثبت است.

انرژی داخلی گاز کامل: بر اساس قضیه همپاری انرژی می‌توانیم انرژی داخلی گاز کامل را به دست آوریم. این قضیه بدین صورت بیان می‌شود: برای هر مولکول از گاز کامل، انرژی کل بین درجات آزادی آن مولکول به طور مساوی تقسیم می‌شود و سهم هر درجه آزادی $\frac{1}{1}kT$ یا $\frac{1}{2}nRT$ است.

یعنی برای N مولکول با سه درجه آزادی $E_{\text{داخلی}} = 3N(\frac{1}{2}kT) = \frac{3}{2}nRT$ و $\Delta E_{\text{داخلی}} = \frac{3}{2}nR\Delta T$ است. هر صورت مستقلی از انرژی را که سیستم می‌تواند داشته باشد، یک درجه آزادی می‌نامند. مثلا یک مولکول از گاز کاملی که فقط دارای انرژی جنبشی انتقالی است، سه درجه آزادی دارد($\frac{1}{2}mv_x^2$ و $\frac{1}{2}mv_y^2$ و $\frac{1}{2}mv_z^2$). یعنی انرژی کل بین این سه حالت به طور مساوی تقسیم می‌شود. حال اگر حرکت مولکول را در راستای x محدود کنیم تعداد درجات آزادی به ۲ تقلیل می‌یابد. اگر مولکولی هم دارای انرژی جنبشی انتقالی باشد و هم دورانی آن‌گاه تعداد درجات آزادی‌اش ۶ خواهد بود(سه درجه انتقالی و سه درجه دورانی) و .... از آنجا که گازهای کامل تنها دارای انرژی جنبشی انتقالی هستند بنابراین برای یک گاز کامل که شامل N مولکول تک اتمی است داریم:

$$\Delta E_{\text{داخلی}} = 3N \times \frac{1}{2}kT = \frac{3}{2}nRT$$

برای یک گاز کامل دو اتمی یکی از درجات آزادی هر کدام از اتم‌ها محدود است(چون اتم‌ها به یکدیگر متصلند). بنابراین تعداد درجات آزادی برابر ۵ می‌باشد.

$$\Delta E_{\text{داخلی}} = 5N \times \frac{1}{2}kT = \frac{5}{2}nRT$$

و برای N مولکول از یک گاز کامل چند اتمی داریم:

$$\Delta E_{\text{داخلی}} = 6N \times \frac{1}{2}kT = 3nRT$$

مسئله: اگر حجم یازده مول از گاز تک‌اتمی هلیوم با $\gamma = 1/66$ در فشار $P = 10\,Pa$ را از $V = 4m^3$ طی یک فرآیند بی‌دررو به $V = 1m^3$ برسانیم، تغییر انرژی درونی گاز چقدر خواهد بود؟

از آنجا که گاز طی یک فرآیند بی‌دررو متراکم شده است توقع داریم کار انجام شده روی آن طی این فرآیند مثبت باشد و بنابراین

انرژی داخلی گاز افزایش یابد($\Delta E_{\text{داخلی}}$).

$$n = ۱۱mol\ ;\ V_i = ۴m^۳\ ;\ V_f = ۱mm^۳\ ;\ P_i = ۱۰Pa\ ;\ \Delta E_{\text{داخلی}} = \frac{۳}{۲}nR\,\Delta T$$

$$\text{فرآیند بی‌دررو}\ P_iV_i^\gamma = P_fV_f^\gamma \Longrightarrow P_f = \frac{P_iV_i^\gamma}{V_f^\gamma} = ۱۰۰Pa$$

$$\text{معادله حالت گاز کامل}\ T_i = \frac{P_iV_i}{nR} = ۴۴K\ ;\ T_f = \frac{P_fV_f}{nR} = ۱۰۹K\ ;\ \Delta T = T_f - T_i = ۶۵K$$

$$\Delta E_{\text{داخلی}} = ۸۹J$$

گرما: در فصل قبل بیان شد که وقتی دو جسم با دماهای متفاوت در تماس با یکدیگر قرار می‌گیرند با تبادل انرژی بین یکدیگر به دمای ثابتی می‌رسند(تعادل گرمایی). به انرژی ردّ و بدل شده بین دو سیستم، گرما می‌گوییم. گرما را با نماد Q نشان می‌دهیم و چون نوعی انرژی است در سیستم SI بر حسب یکای ژول(J) تعریف می‌شود[۳]. درواقع کار و گرما نوعی از انرژی هستند(از یک جنس هستند) که بر حسب ژول بیان می‌شوند. برای مثال می‌توان به روشن کردن آتش توسط انسان‌های نخستین اشاره کرد. آن‌ها با مالیدن دو چوب به یکدیگر(انجام کار) می‌توانستند آتش بیفروزند(گرما تولید کنند). اگر سیستمی(مانند چای داغ) را در اتاقی قرار دهیم که دمای کمتری نسبت به چای دارد. سیستم با از دست دادن گرما به تعادل گرمایی می‌رسد(دمایش با دمای اتاق برابر می‌شود) در این فرآیند برای سیستم چای داغ $Q < ۰$ است و برای اتاق $Q > ۰$ است. چون چای گرما از دست می‌دهد و اتاق گرما دریافت می‌کند[۴].

ظرفیت گرمایی و گرمای ویژه: نسبت مقدار گرمای انتقال یافته به یک جسم به تغییر دمایی که در این انتقال رخ می‌دهد را ظرفیت گرمایی جسم می‌نامند و با C' نشان می‌دهند.

$$C' = \frac{Q}{\Delta T}$$

ظرفیت گرمایی بر واحد جرم یک جسم را گرمای ویژه می‌نامند و با c نشان می‌دهند.

$$c = \frac{C'}{m} = \frac{Q}{m\Delta T}$$

بنابراین ظرفیت گرمایی هر جسم، خصوصیتی مربوط به جنس جسم است در حالی که گرمای ویژه هر جسم مربوط به شکل ظاهری آن ماده است. ظرفیت گرمایی و گرمای ویژه وابسته به شرایط محیط(دما، فشار و...) هستند. بنابراین برای به دست آوردن گرمای لازم برای افزایش دمای جسمی به جرم m و گرمای ویژه c از T_i به T_f می‌توانیم بازه ΔT را به جزء‌های کوچک ΔT_n تقسیم کنیم به طوری که در هر جزء، گرمای ویژه دارای مقدار ثابتی است و در نهایت سهم همه اجزا را با یکدیگر جمع کنیم($Q = \sum_n mc_n\Delta T$). در حد $\Delta T \to ۰$ جمع گسسته به جمع پیوسته تبدیل می‌شود($Q = m\int_{T_i}^{T_f} c\ dT$). که در آن c ممکن است تابعی از دما باشد. البته در حد دماهای معمولی می‌توانیم c را ثابت در نظر بگیریم. بنابراین گرمای لازم برای تغییر دمای جسمی به جرم m و گرمای ویژه c از T_i به T_f برابر است با:

$$Q = mc(T_f - T_i) \tag{۴}$$

مسئله: قطعه‌ای از جنس مس به جرم $۷۵g$ و گرمای ویژه $c = ۳۸۶\frac{J}{kg.K}$ با دمای $T = ۳۱۲^\circ C$ را درون یک لیوان شیشه‌ای با ظرفیت گرمایی $C' = ۱۹۰\frac{J}{K}$ که حاوی $۲۲۰g$ آب $۱۲^\circ C$ است می‌اندازیم. اگر گرمای ویژه آب $۴۱۹۰\frac{J}{kg.K}$ باشد، دمای نهایی که همان دمای تعادل هر سه جسم است را به دست آورید.

اگر قطعه مس و لیوان و آب را به عنوان یک سیستم در نظر بگیریم، گرمای انتقال یافته از مس به لیوان و آب درواقع گرمای داخلی سیستم محسوب می‌شود. چون سیستم با محیط بیرون خود تبادل گرما ندارد بنابراین لازم است گرمای انتقال یافته از یکی برابر با گرمای دریافت شده توسط سایر اجسام درون سیستم باشد. گرمای منتقل شده از مس برابر است با $\left(Q_{\text{مس}} = m_{\text{مس}}c_{\text{مس}}\Delta T_{\text{مس}}\right)$. گرمای دریافت شده توسط آب برابر $\left(Q_{\text{آب}} = m_{\text{آب}}c_{\text{آب}}\Delta T_{\text{آب}}\right)$ و گرمای دریافتی توسط لیوان نیز $\left(Q_{\text{لیوان}} = C'_{\text{لیوان}}\Delta T_{\text{لیوان}}\right)$ هستند. چون سیستم با محیط اطراف خود تبادل گرما ندارد باید $Q_{\text{مس}} + Q_{\text{آب}} + Q_{\text{لیوان}} = ۰$ باشد. فرض می‌کنیم که آب و لیوان در تعادل گرمایی بوده‌اند و دارای دمای اولیه یکسانی هستند. بنابراین از رابطه (۴) داریم:

$$Q_{\text{مس}} = /۰۷۵ \times ۳۸۶(T_f - ۳۱۲)\ ;\ Q_{\text{آب}} = /۲۲ \times ۴۱۹۰(T_f - ۱۲)\ ;\ Q_{\text{لیوان}} = ۱۹۰(T_f - ۱۲)$$

$$Q_{\text{مس}} + Q_{\text{آب}} + Q_{\text{لیوان}} = ۰ \Longrightarrow T_f = \frac{۹۰۳۲/۴ + ۱۱۰۶۱/۶ + ۲۲۸۰}{۲۸/۹ + ۹۲۱/۸ + ۱۹۰} = ۱۹/۶^\circ C$$

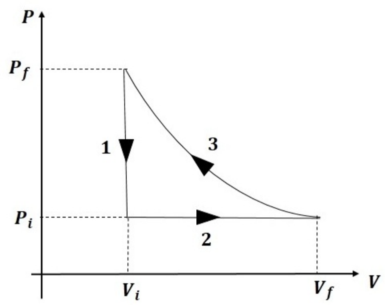
[۳] پیش از ژول از یکای کالری برای گرما استفاده می‌شد. چون ژول برای کار استفاده می‌شود، تامسون تمایل داشت نشان دهد که کار و گرما هم‌جنس هستند. بنابراین با انجام آزمایشی توانست با انجام دادن کار مکانیکی روی یک سیستم(جابه‌جا کردن وزنه‌های مکانیکی درون آب) تغییر دمایی مشابه آنچه با گرفتن گرمایی برابر با کار انجام شده اتفاق می‌افتد را مشاهده کند. یعنی کار انجام شده به گرما تبدیل شده است.

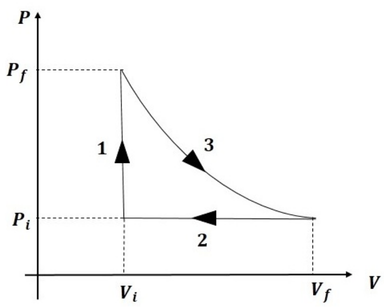
[۴] تصورات عامیانه از گرما ممکن است گاهی نادرست باشند. برخی گرما را هم‌ارز دما می‌پندارند. در صورتی که ورود یا خروج گرما از یک سیستم فقط می‌تواند عاملی برای تغییر دما یا تغییر انرژی درونی سیستم باشد.

قانون اول ترمودینامیک: بر اساس این قانون، هر تغییری در انرژی داخلی سیستمی از گازها ناشی از انجام کار و یا تبادل گرما بین سیستم و محیط پیرامونش است. یعنی

$$\Delta E_{\text{داخلی}} = Q + W \qquad (۵)$$

البته علامت هر یک از کمیت‌های موجود در این رابطه نیز باید در نظر گرفته شوند. بدین صورت که اگر کار روی سیستم انجام شود $W > 0$ است(اگر سیستم روی محیط، کار انجام دهد $W < 0$.) و اگر گرما وارد سیستم شود Q را مثبت در نظر می‌گیریم و اگر گرما از سیستم خارج شود $Q < 0$ خواهد بود. هرچند کار و گرما هر یک به تنهایی برای هر فرآیندی به مسیری که طی آن سیستم جابه‌جا می‌شود بستگی دارد ولی کمیت $Q + W$ به مسیر فرآیند بستگی ندارد و تنها به حالت‌های تعادلی ابتدایی و انتهایی فرآیند بستگی دارد.
نکته: در یک فرآیند بی‌درو $W = \Delta E_{\text{داخلی}}$ است. چون در چنین فرآیندی، هیچ گرمایی بین سیستم و محیط، مبادله نمی‌شود ($Q = 0$).
نکته: در یک فرآیند تک‌حجم، کاری روی سیستم انجام نمی‌شود. بنابراین $Q = \Delta E_{\text{داخلی}}$. یعنی تغییر در انرژی سیستمی که از طریق یک فرآیند تک‌حجم خواص ترمودینامیکی‌اش تغییر می‌کند برابر با گرمای مبادله شده بین سیستم و محیط است.
نکته: در یک فرآیند تکدما، با تغییر خواص ترمودینامیکی سیستم، تغییری در انرژی داخلی سیستم رخ نمی‌دهد چون انرژی درونی گاز کامل فقط به دما بستگی دارد. بنابراین در فرآیند تکدما $W = -Q$ خواهد بود.
برخی مواقع سیستم را مانند شکل‌های زیر از یک حالت تعادلی با انجام فرآیندهایی دچار تغییر کرده و در نهایت به همان حالت تعادلی اولیه بازمی‌گردانیم. چنین فرآیندی را فرآیند چرخه‌ای می‌نامند. از آنجا که تغییر انرژی داخلی سیستم فقط به حالت‌های ابتدایی و انتهایی فرآیند بستگی دارد بنابراین در یک فرآیند چرخه‌ای $\Delta E_{\text{داخلی}} = 0$ است.



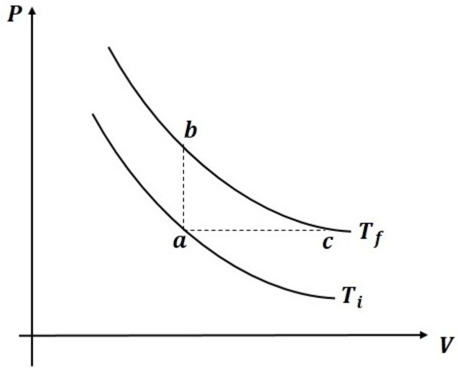


در شکل سمت راست که مسیر چرخش ساعتگرد است کار انجام شده روی سیستم منفی است و $Q > 0$. چون در این فرآیند مساحت زیر منحنی مسیر ۳ منفی(چون برای منبسط کردن گاز کامل از طریق یک فرآیند تکدما، گاز روی محیط کار انجام می‌دهد و $W < 0$) و بیشتر از مساحت زیر منحنی مسیر ۲ است. هرچند کار در مسیر ۲ مثبت است ولی مقدارش از کار لازم برای پیمودن مسیر ۳ کمتر است(چون سطح زیر نمودار مسیر ۳ بیشتر از سطح زیر نمودار مسیر ۲ می‌باشد و سطح زیر نمودار معرف کار است).
در حالی که برای چرخه‌ای که مانند شکل سمت چپ در جهت پادساعتگرد پیموده می‌شود $W > 0$ و در نتیجه $Q < 0$. در این چرخه، کار در مسیر ۳ مقداری مثبت است چون در این مسیر، سیستم طی یک فرآیند تکدما متراکم شده است.
ظرفیت گرمایی گاز کامل در حجم ثابت: می‌دانیم که گرمای منتقل شده به یک سیستم یا گرمای خارج شده از یک سیستم می‌تواند صرف کار یا تغییر انرژی داخلی سیستم شود. پیش‌تر نشان دادیم که در یک فرآیند تک حجم، کاری روی سیستم انجام نمی‌شود. بنابراین توقع داریم انتقال گرما به یک سیستم در طی یک فرآیند تک حجم تماما صرف تغییر انرژی داخلی جسم شود[۵]. یعنی $Q = \Delta E_{\text{داخلی}}$. اگر ظرفیت گرمایی مولی(ظرفیت گرمایی تقسیم بر تعداد مول) یک گاز کامل در حجم ثابت را با C_v نشان دهیم داریم:

$$C_v = \frac{Q}{n\Delta T} = \frac{\Delta E_{\text{داخلی}}}{n\Delta T}$$

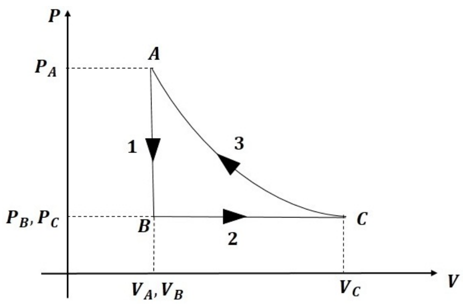
از طرفی برای یک گاز کامل تک‌اتمی $\Delta E_{\text{داخلی}} = \frac{3}{2} nR\Delta T$ است. بنابراین $C_v = \frac{3}{2}R$. برای گاز کامل دو اتمی $C_v = \frac{5}{2}R$ و برای گاز کامل چند اتمی نیز $C_v = 3R$ است. یکای ظرفیت گرمایی مولی عبارت است از $\frac{J}{mol.K}$.
ظرفیت گرمایی گاز کامل در فشار ثابت: برای به دست آوردن ظرفیت گرمایی مولی گازهای کامل در فشار ثابت از ترفند زیر استفاده می‌کنیم. اگر مطابق شکل زیر سیستمی از گاز کامل را طی فرآیندی از منحنی تکدمایی که در دمای T_i قرار دارد به منحنی تکدمایی با دمای T_f برسانیم انتظار داریم که تغییر انرژی داخلی سیستم به مسیری که این فرآیند تحت آن انجام می‌شود بستگی نداشته باشد چون بر اساس قضیه همپاری انرژی (تغییر) انرژی داخلی سیستم شامل گاز کامل فقط به (تغییر) دما وابسته است و اگر سیستم را توسط هر مسیری از T_i به T_f برسانیم به تغییر انرژی یکسانی دست می‌یابیم.

[۵] یعنی اگر گرما از محیط به سیستم وارد شود، انرژی داخلی سیستم افزایش یابد و اگر گرما از سیستم خارج شود، انرژی داخلی‌اش کاهش یابد.



به عنوان نمونه تغییر انرژی داخلی سیستم طی این فرآیند که از مسیر تک‌حجم ab به دست می‌آید با مسیر تک‌فشار ac برابر خواهد بود چون اختلاف دمای ابتدایی و نهایی در هر دو مسیر، یکسان است. از طرفی طبق قانون اول ترمودینامیک، تغییر انرژی داخلی ایجاد شده در مسیر ac ناشی از انجام کار W و انتقال گرمای Q است($\Delta E_{\text{داخلی}} = Q + W$). اگر ظرفیت گرمایی مولی گاز کامل در فشار ثابت را با C_p نشان دهیم داریم:

$$Q = nC_p\Delta T\ ;\ \Delta T = T_f - T_i$$
$$W = -P\Delta V = -nR\Delta T$$
$$\Delta E_{ab\ \text{داخلی مسیر}} = \Delta E_{ac\ \text{داخلی مسیر}} = Q + W \Rightarrow nC_v\Delta T = nC_p\Delta T - nR\Delta T \Rightarrow C_p + C_v = R$$
$$\text{گاز تک اتمی}\ C_p = \frac{۵}{۲}R(\frac{J}{mol.K})\ ;\ \text{گاز دو اتمی}\ C_p = \frac{۷}{۲}R(\frac{J}{mol.K})\ ;\ \text{گاز چند اتمی}\ C_p = ۴R(\frac{J}{mol.K})$$



مسئله: در چرخه شکل مقابل که از نقطه A طی یک فرآیند تک‌حجم، فشارش کاهش می‌یابد و به B می‌رسد. سپس در فشار ثابت، حجمش افزایش یافته(منبسط می‌شود) تا به C برسد و نهایتا با یک تراکم تکدما به نقطه A باز می‌گردد. اگر این چرخه در مورد $/۷۵mol$ گاز کامل دو اتمی برقرار باشد و $P_B = ۱/۲ \times ۱۰^۳Pa$ و $V_A = /۲۱m^۳$ ،$P_A = ۳/۲ \times ۱۰^۳Pa$ باشند برای هر کدام از مسیرهای سه‌گانه مقادیر Q، W و $\Delta E_{\text{داخلی}}$ را به دست آورید.

ابتدا به کمک معادله حالت($PV = nRT$)، دمای هر یک از نقاط را به دست می‌آوریم.

$$T_A = \frac{P_AV_A}{nR} = ۱۰۸K\ ;\ T_B = \frac{P_BV_B}{nR} = ۴۰K$$

مسیر ۳ یک فرآیند تکدماست. بنابراین دمای نقطه C با دمای A برابر است. درنتیجه: $V_C = \dfrac{nRT_C}{P_C} = /۵۶m^۳$

مسیر ۱: $W_۱ = ۰\ ;\ Q_۱ = nC_v(T_B - T_A) = -۱۰۶۰J$ کار در فرآیند تک‌حجم، صفر است.

$$\Longrightarrow \Delta E_{۱\text{داخلی}} = Q + W = -۱۰۶۰J$$

در مسیر ۱، مقدار گرما منفی است یعنی گرما از گاز به محیط منتقل شده است(سیستم گرما از دست داده) بنابراین باید انرژی داخلی سیستم کاهش یابد یعنی $\Delta E_{۱\text{داخلی}} < ۰$ باشد.

مسیر ۲: $W_۲ = -P(V_C - V_B) = -۴۲۰J\ ;\ Q_۲ = nC_P(T_C - T_B) = ۱۴۸۰J$

$$\Longrightarrow \Delta E_{۲\text{داخلی}} = Q + W = ۱۰۶۰J$$

در مسیر دوم، سیستم روی محیط کار انجام داده است و گرما را از محیط دریافت کرده است. چون در این مسیر، $W < ۰$ و $Q > ۰$ است.

در فرآیند تکدما انرژی درونی ثابت می‌ماند. $\Delta E_{۳\text{داخلی}} = ۰\ ;\ W_۳ = -nRT_C\ Ln\dfrac{V_A}{V_C} = ۶۶۰J$

$$\Longrightarrow Q_۳ = \Delta E_{۳\text{داخلی}} - W_۳ = -۶۶۰J$$

قانون دوم ترمودینامیک: قانون صفرم ترمودینامیک اسبابی برای معرفی کمیت دما بود و قانون اول کمیت انرژی داخلی سیستم را معرفی کرد. در قانون دوم که جهت انجام واکنش‌های یک سیستم را مشخص می‌کند کمیت جدیدی تعریف می‌کنیم که آنتروپی نام دارد و با S نشان داده می‌شود. اگر فرض کنیم ترقه‌ای درون یک محفظه منفجر شده و انرژی داخلی‌اش به شکل کار و گرما به محیط منتقل می‌شود. حال اگر واکنش برگشت یعنی تبدیل کار و گرما به انرژی درونی اتفاق افتد انتظار داریم که پس از انفجار بتوان گرما و کار موجود در محفظه را مجددا به ترقه تبدیل کنیم. انجام چنین واکنشی با قانون‌های صفرم و اول منافاتی ندارد ولی قانون دوم که در زیر بیان می‌گردد چنین واکنشی را غیرممکن می‌داند. بر اساس قانون دوم ترمودینامیک، در هر فرآیند ترمودینامیکی که از یک حالت تعادل به یک حالت تعادل دیگر انجام می‌شود آنتروپی سیستم+محیط یا تغییر نمی‌کند یا افزایش می‌یابد. تغییرات آنتروپی را با کمیت $dS = \frac{dQ}{T}$ نشان می‌دهیم. بنابراین تنها فرآیندهایی که برای آن‌ها $dS \geq ۰$ باشد انجام‌پذیرند.

قانون دوم به بیان کلوین-پلانک: ماشین گرمایی ابزاری است که طی یک فرآیند چرخه‌ای، گرما را به کار تبدیل می‌کند. یعنی انرژی به صورت گرما وارد سیستم می‌شود و بخشی از آن به صورت کار روی محیط از سیستم خارج می‌شود. نمونه‌ای از یک ماشین گرمایی، کولر است که گرما را از هوای درونش می‌گیرد و هوای خنک را به درون اتاق می‌دمد. ضمن این فرآیند مقداری کار و گرمای گرفته شده از هوا را به محیط می‌دهد. قانون دوم که جهت چرخه کار ماشین گرمایی را تعیین می‌کند بدین صورت است: در یک فرآیند چرخه‌ای امکان ندارد که گرمای گرفته شده را تماما به کار تبدیل کنیم[۶]. این بیان از قانون دوم ترمودینامیک به بیان کلوین-پلانک معروف است.

قانون دوم به بیان سلسیوس: یخچال نوعی ماشین گرمایی است که در جهت عکس کار می‌کند. یعنی در یک یخچال با انجام کار روی سیستم، مقداری گرما را از هوای درون یخچال می‌گیرد و آن را به محیط بیرون منتقل می‌کند. به کار بردن قانون دوم ترمودینامیک به نتیجه زیر منجر می‌شود که قانون دوم ترمودینامیک به بیان سلسیوس است: امکان ندارد در یک فرآیند چرخه‌ای، گرما از یک جسم با دمای کمتر به جسمی با دمای بالاتر منتقل شود مگر اینکه کار خارجی روی آن انجام شود.

[۶] به عبارت دیگر اگر بازده ماشین گرمایی را به صورت نسبت کار انجام داده به گرمای دریافت شده توسط ماشین تعریف کنیم، امکان ندارد ماشینی بسازیم که بازده‌اش صددرصد باشد.