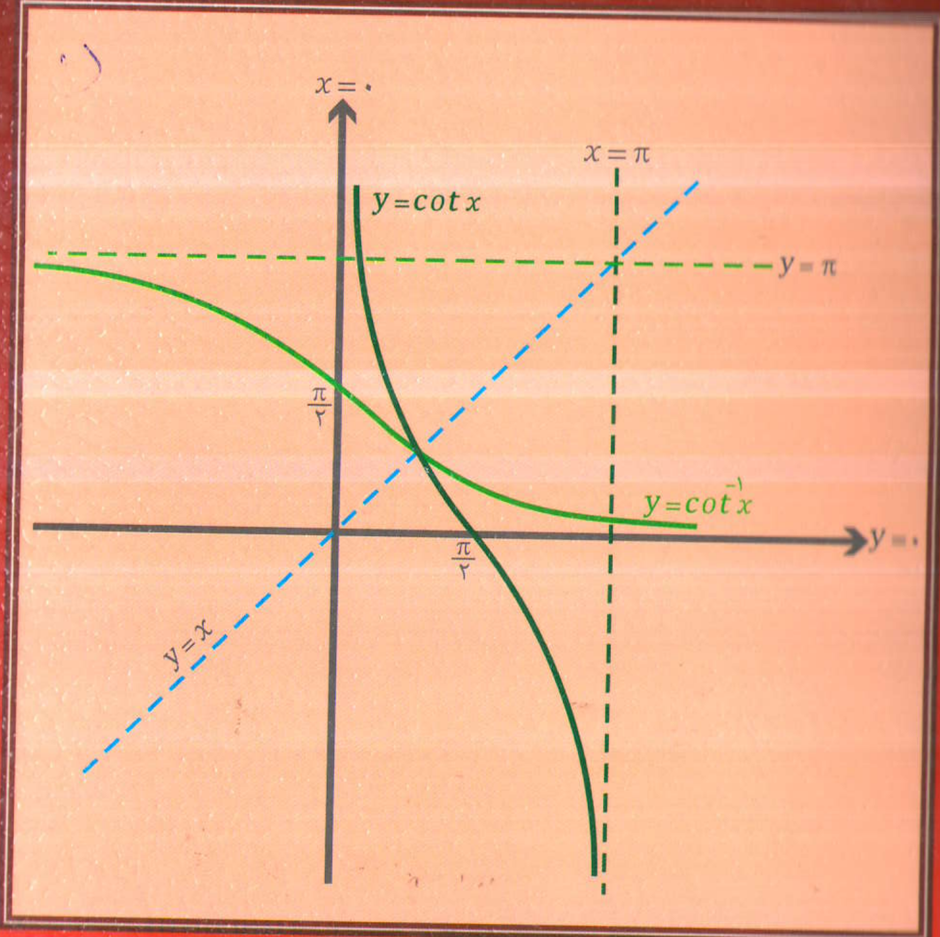
ویرایش چهارم
همراه با پاسخ کوتاه تمرین‌ها

ریاضیات عمومی یک

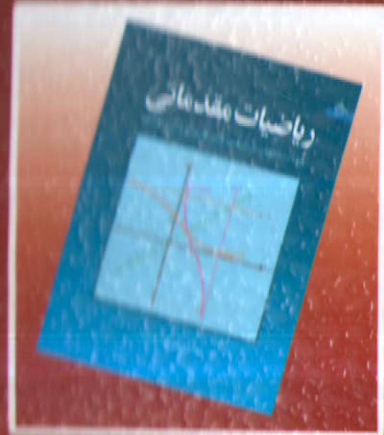
ویژه دانشجویان مراکز فنی، علمی کاربردی و آزاد اسلامی



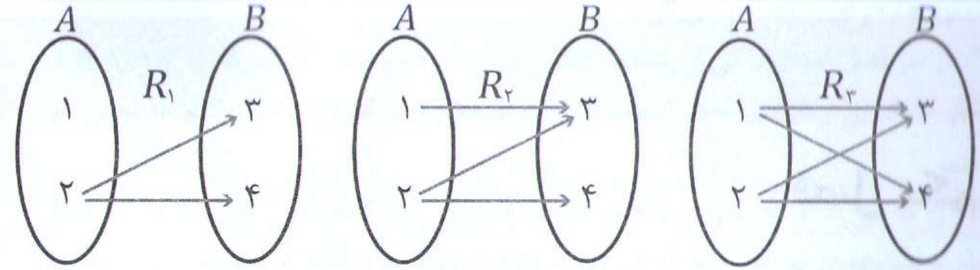
محمدعلی کرایه‌چیان

ریاضیات عمومی یک

محمدعلی کرایه‌چیان



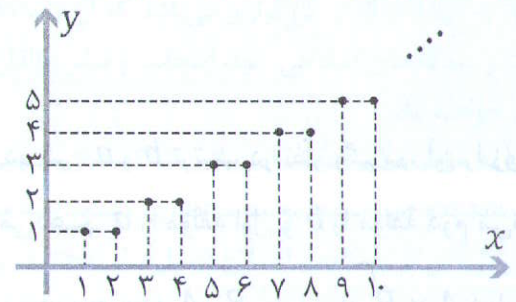
نمودار پیکانی: نمودار پیکانی رابطه‌های مثال قبل به صورت زیر می‌باشد.



مثال ۲: هرگاه $\mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی باشد، مجموعه زیر یک رابطه از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ می‌باشد.

$$R = \{(۱,۱) ، (۲,۱) ، (۳,۲) ، (۴,۲) ، (۵,۳) ، (۶,۳) ، ...\}$$

نمودار دکارتی: نمودار دکارتی مثال قبل به صورت زیر می‌باشد.



تعریف ۴: هر رابطه‌ای که هیچ دو زوج مرتب متمایز آن، دارای مؤلفه‌های اول مساوی نباشد، **تابع** می‌گویند.

نکته ۱: رابطه‌ای تابع است که اگر نمودار پیکانی آن را رسم کنیم از هر عضو مجموعه اول، حداکثر یک پیکان خارج شود.

نکته ۲: رابطه‌ای تابع است که اگر نمودار دکارتی آن را رسم کنیم هر خط موازی با محور yها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال ۳: از دو رابطه زیر، $R_۱$ تابع است ولی $R_۲$ تابع نمی‌باشد.

$$R_۱ = \{(۱,۲) ، (۲,۴) ، (۳,۵) ، (۴,۵)\}$$

$$R_۲ = \{(۱,۲) ، (۳,۲) ، (۴,۵) ، (۴,۲)\}$$

تعریف ۵: مجموعه مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تابع f را **دامنه تابع** f می‌گویند و با D_f نشان می‌دهند. هم‌چنین مجموعه تمام مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب تابع f را **برد تابع** f می‌گویند و با R_f نشان می‌دهند.

$$D_f = \{x \mid (x,y) \in f\} \quad , \quad R_f = \{y \mid (x,y) \in f\}$$

مروری بر مفهوم تابع: همه انسان‌ها مفهوم تابع را در زندگی روزانه تجربه کرده‌اند بدون اینکه به تعریف آن دقت داشته باشند. در زیر به بعضی از آنها اشاره می‌کنیم.

الف) یک دانش‌آموز دبستانی را در نظر بگیرید. کارنامه درسی او در پایان سال، مجموعه‌ای از ازواج مرتب می‌باشد. ممکن است در چند درس متفاوت، نمره‌های یکسانی کسب کرده باشد ولی او نمی‌تواند بپذیرد که برای یک درس، دو یا چند نمره متفاوت ثبت شده است. به عبارت دیگر در این کارنامه هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه‌های اول برابر نمی‌باشد؛ پس کارنامه این دانش‌آموز، یک تابع است.

ب) درجه حرارت بیماری در ساعات مختلف یک روز، در جدولی ثبت شده است. در این جدول ممکن است در ساعت‌های مختلف، درجه حرارت یکسان باشد ولی هیچ کس نمی‌پذیرد که بیمار در یک ساعت مشخص، دارای بیش از یک درجه حرارت باشد. به عبارت دیگر در این جدول هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه‌های اول برابر نمی‌باشد؛ پس جدول درجه حرارت بیمار، یک تابع است.

ج) اگر مساحت دایره را با S و شعاع آن را با r نمایش دهیم، بین S و r رابطه $S = \pi r^۲$ برقرار است. در این رابطه به هر عدد مثبت r فقط یک عدد حقیقی S وابسته می‌شود و امکان ندارد برای یک شعاع، مساحت‌های مختلفی به دست بیاید. پس این رابطه، یک تابع است (تمام فرمول‌های مربوط به محاسبه محیط، مساحت و حجم یک تابع است).

د) در یک آزمایشگاه عمل کشت با ۵۰۰ باکتری شروع و در هر ساعت تعداد آنها دو برابر می‌شود. اگر تعداد باکتری‌ها را پس از t ساعت، با N نمایش دهیم، داریم: $N = ۵۰۰ \times ۲^t$ در این رابطه به هر عدد طبیعی t فقط یک عدد طبیعی N وابسته می‌شود و امکان ندارد در یک ساعت، تعداد باکتری‌ها دو عدد متفاوت باشد. پس این رابطه، یک تابع است.

تذکر: ما از میان توابع، به مطالعه و بررسی توابعی می‌پردازیم که بین مؤلفه اول و مؤلفه دوم عضوهای آن، نظم خاصی برقرار باشد.

مثال ۴: نظم توابع زیر را پیدا کرده و به زبان ریاضی بنویسید.

$$f = \{(۱,۳) ، (۲,۵) ، (۳,۷) ، (۴,۹) ، (۵,۱۱) ، ...\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$g = \{(۰,۱) ، (۱,۲) ، (۲,۵) ، (۳,۱۰) ، (۴,۱۷) ، ...\} \subset \mathbb{W} \times \mathbb{N}$$

حل:

$$f = \{(x,y) \mid y = ۲x + ۱ \text{ و } x, y \in \mathbb{N}\}$$

$$g = \{(x,y) \mid y = x^۲ + ۱ \text{ و } x \in \mathbb{W} \text{ و } y \in \mathbb{N}\}$$

نمایش دیگر برای تابع: با توجه به اینکه در تابع f، به هر x یک y منحصر بفرد نسبت می‌دهیم، لذا y را با نماد $f(x)$ نشان داده و آن را ضابطه یا قانون تابع می‌نامیم. توابع f و g مثال قبل را به صورت‌های زیر نشان می‌دهیم.

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad , \quad g: \mathbb{W} \to \mathbb{N}$$
$$f(x) = ۲x + ۱ \quad\quad g(x) = x^۲ + ۱$$

نمایش $f: A \to B$ را می‌خوانیم: «تابع f از A به B» همچنین مجموعه A را مجموعه مبدا و مجموعه B را مجموعه مقصد می‌گویند[1] و داریم: $D_f \subset A$ و $R_f \subset B$

مثال ۵: توابع زیر را ابتدا به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نوشته‌ایم، سپس دامنه و برد هرکدام را مشخص کرده‌ایم.

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$	$f = \{(۳,۱) ، (۶,۲) ، (۱۱,۳) ، (۱۸,۴) ، ...\}$
$f(x) = \sqrt{x - ۲}$	$D_f = \{۳,۶,۱۱,۱۸, ...\} \quad , \quad R_f = \mathbb{N}$

۱- در نمایش $f: A \to B$ بعضی از مؤلفین قرارداد می‌کنند: $D_f = A$. این قرارداد محاسن و معایبی دارد. از محاسن آن این است که همراه با ضابطه تابع، دامنه هم مشخص است و نیازی به عملیات اضافی برای یافتن دامنه نیست. از معایب آن این است که دیگر نمی‌توان تابع حقیقی را به صورت $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ نوشت. زیرا هر وقت تابع حقیقی را بخواهیم به صورت $f: A \to B$ بنویسیم باید اول دامنه آن را مشخص کنیم، در حالی که شاید نیازی به دامنه نباشد. لازم به تذکر است در تمام مباحث این کتاب به جز توابع یک تمرین، با توابع حقیقی کار می‌کنیم.

$g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$	$g = \{(۰,۱) ، (۱,۲) ، (-۱,۲) ، (۲,۳) ، (-۲,۳) ، ...\}$
$g(x) = \lvert x \rvert + ۱$	$D_g = \mathbb{Z} \quad , \quad R_g = \mathbb{N}$

تعریف ۶: هرگاه $f: A \to B$ یک تابع و برد آن مجموعه B باشد، یعنی داشته باشیم: $R_f = B$، آنگاه تابع f را **پوشا** می‌گویند.

مثال ۶: برای دو تابع f و g مثال قبل داریم: $R_f = \mathbb{N}$ و $R_g \neq \mathbb{Z}$. بنابراین f پوشا است ولی g پوشا نمی‌باشد.

تعریف ۷: تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را **تابع حقیقی** می‌نامیم. در توابع حقیقی تنها به ذکر ضابطه اکتفا می‌کنیم. بنابراین هرگاه تنها ضابطه تابع داده شده باشد، منظور تابع حقیقی است.

در درس‌های ریاضی و رشته‌های مختلف علوم، توابع حقیقی کاربرد فراوانی دارند؛ لذا در ادامه این فصل سعی می‌کنیم با این نوع توابع بیشتر آشنا شویم.

تعریف ۸: بزرگترین زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ که به ازای هر x در آن، $f(x)$ با معنا باشد، **دامنه تابع حقیقی** نامیده می‌شود.

مثال ۷: دامنه چند تابع در زیر مشخص شده است.

۱) $f(x) = ۲x^۲ + ۳x - ۱ \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$

۲) $g(x) = \frac{x-۱}{x^۲ - ۲x} \quad , \quad D_g = \{x \mid x^۲ - ۲x \neq ۰\} = \mathbb{R} - \{۰, ۲\}$

۳) $h(x) = \sqrt{x^۲ + ۲x}$

$D_h = \{x \mid x^۲ + ۲x \geq ۰\} = (-\infty, -۲] \cup [۰, +\infty)$

۴) $k(x) = \frac{۱}{\sqrt[۴]{۵ - \lvert x \rvert}}$

$D_k = \{x \mid ۵ - \lvert x \rvert > ۰\} = \{x \mid \lvert x \rvert < ۵\} = (-۵, ۵)$

۵) $l(x) = \sqrt{x + ۱} - \frac{۱}{\sqrt{۴ - x^۲}}$

$$D_l = \{x \mid x+1 \geq 0 \text{ و } 4 - x^2 > 0\}$$
$$= \{x \mid x \geq -1 \text{ و } -2 < x < 2\} = [-1, 2)$$

۶) $e(x) = \tan x$

$$D_e = \{x \mid \cos x \neq 0\} = \{x \mid x \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \text{ و } k \in \mathbb{Z}\}$$

تعریف ۹: توابع f و g را **توابع مساوی** گویند هرگاه: الف) دامنه این دو تابع مساوی باشند $(D_f = D_g = D)$ ب) برای هر $x \in D$ داشته باشیم: $f(x) = g(x)$

مثال ۸: دو تابع حقیقی $f(x) = \frac{x^2-x}{x}$ و $g(x) = x - 1$ مساوی نیستند، زیرا دامنه‌های نابرابر دارند: $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ و $D_g = \mathbb{R}$ (برای $x \neq 0$ داریم: $f(x) = g(x)$)

مثال ۹: دامنه دو تابع $f(x) = \cos x$ و $g(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد، اما داریم: $g(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$

لذا ضابطه‌های دو تابع نابرابر است، در نتیجه f و g مساوی نمی‌باشند.

مثال ۱۰: دو تابع حقیقی $f(x) = \frac{x}{x^2(x-1)}$ و $g(x) = \frac{1}{x(x-1)}$ مساوی می‌باشند، زیرا: $D_f = D_g = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ و برای هر $x \neq 0, 1$ داریم: $f(x) = g(x)$

تمرین

۱- توابع زیر را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید، سپس دامنه هریک را مشخص کنید.

۱) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x - 3$

۲) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(x) = \sqrt{-x}$

۳) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$

۴) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{x-1}{2x-1}$

۲- دامنه توابع حقیقی زیر را مشخص کنید.

۱) $f(x) = \frac{4x^2-9}{2x-3}$

۲) $f(x) = x^4 - 3x + 1$

۳) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

۴) $f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{x-5}$

۵) $f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{2-x}}$

۶) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{4-x^2}}$

۷) $f(x) = \frac{2x-1}{x\sqrt{x^2-9}}$

۸) $f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{x}$

۹) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x^2-x}}$

۱۰) $f(x) = \sqrt{2 - |x|}$

۱۱) $f(x) = \sqrt{|x-1| - 3}$

۱۲) $f(x) = \frac{2x+1}{|2x-1|-5}$

۱۳) $f(x) = \frac{5x}{2^{|x|}-8}$

۱۴) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{|x|-2}$

۱۵) $f(x) = \sqrt{\frac{|x|+1}{1-x^2}}$

۱۶) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x - 1}$

۱۷) $f(x) = \frac{1}{2\sin x + 1}$

۱۸) $f(x) = \tan 2x$

۳- تساوی توابع زیر را بررسی کنید.

۱) $f(x) = \tan x \cot x \quad , \quad g(x) = 1$

۲) $f(x) = \frac{x^2-2x}{x^2-4} \quad , \quad g(x) = \frac{x^3-2x^2}{x^3-4x}$

۳) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4(x-1)} \quad , \quad g(x) = |x-2|$

۴) $f(x) = \cos^2 x \quad , \quad g(x) = \sqrt{(1-\sin^2 x)^2}$

۵) $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{x+1} \quad , \quad g(x) = \sqrt{x(x+1)}$

۶) $f(x) = \sqrt[3]{x}\sqrt{x} \quad , \quad g(x) = \sqrt[6]{x^5}$

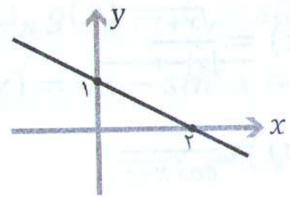
۲-۱ نمودار بعضی از توابع حقیقی و ویژگی آنها

برای رسم نمودار توابع حقیقی در این کتاب از روش نقطه‌یابی استفاده می‌کنیم. هر چه تعداد نقاط انتخاب شده بیشتر باشد، شکل تابع دقیق‌تر رسم می‌شود. البته برای توابع خاص، روش‌هایی ارائه خواهیم کرد که بتوان با حداقل نقاط، آنها را رسم کرد.

۱- نمودار تابع $f(x) = ax + b$: نمودار این تابع یک خط راست می‌باشد، لذا به آن تابع خطی می‌گویند. هرخط راست را می‌توان به کمک دو نقطه آن رسم کرد. در حالت $a = ۰$ داریم: $f(x) = b$؛ این تابع را **تابع ثابت** می‌گویند و نمودار آن خطی راست، موازی محور xها می‌باشد. تابع $f(x) = x$ **را تابع همانی** می‌نامند؛ نمودار این تابع به نیمساز ناحیه اول و سوم مشهور می‌باشد.

مثال ۱: نمودار تابع $f(x) = -\frac{۱}{۲}x + ۱$ را رسم کنید.

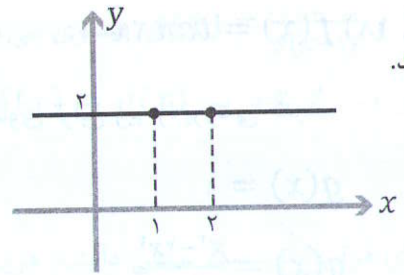
حل:



x	۰	۲
y	۱	۰

مثال ۲: نمودار تابع $f(x) = ۲$ را رسم کنید.

حل:



x	۱	۲
y	۲	۲

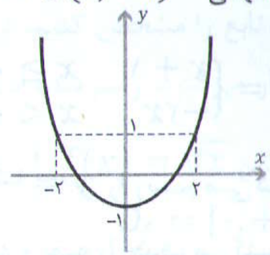
۲- نمودار تابع $f(x) = ax^{۲} + bx + c$: با فرض $a \neq ۰$، نمودار این تابع یک سهمی می‌باشد. سهمی‌ها را می‌توان به کمک سه نقطه رسم کرد. یکی از این نقاط رأس سهمی، و دو نقطه دیگر را در دو طرف رأس انتخاب می‌کنیم. برای رسم دقیق‌تر سهمی، بهتر است که دو نقطه را نسبت به محور تقارن، قرینه انتخاب کنیم.

اگر $a > ۰$ جهت سهمی به سمت بالا و اگر $a < ۰$ جهت سهمی به سمت پایین است؛ هم‌چنین نمودار سهمی نسبت به خط $x = \frac{-b}{۲a}$ متقارن می‌باشد.

مثال ۱: نمودار تابع $f(x) = \frac{۱}{۲}x^{۲} - ۱$ را رسم کنید.

حل: $x = \frac{-b}{۲a} = \frac{۰}{۱} = ۰ \to y = f(۰) = -۱ \to S(۰,-۱)$ رأس سهمی

x	-۲	۰	۲
y	۱	-۱	۱



نکته: هر تابع به صورت $f(x) = a_۰ + a_۱x + a_۲x^{۲} + \cdots + a_nx^n$ که $a_i \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}$، را یک **تابع چندجمله‌ای از درجه n** یا به اختصار **تابع درجه n** می‌گویند. دامنه هرتابع چندجمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد.

۳- رسم توابع چند ضابطه‌ای: در مثال‌های زیر ابتدا با نماد و مفهوم تابع چند ضابطه‌ای و ناحیه‌های مختلف صفحه آشنا می‌شویم، سپس روش رسم این نوع توابع را بیان می‌کنیم.

مثال ۱: تابع $f(x) = \begin{cases} ۲x + ۱ & x \leq ۱ \\ x^{۲} - ۱ & ۱ < x \end{cases}$ را یک تابع دو ضابطه‌ای می‌گویند. برای این تابع داریم:

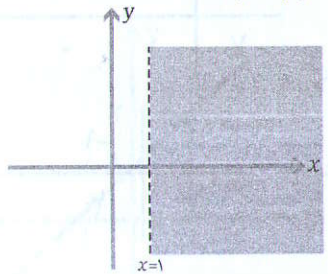
$۰ < ۱ \to f(۰) = ۲(۰) + ۱ = ۱ \quad , \quad ۱ < \sqrt{۵} \to f(\sqrt{۵}) = (\sqrt{۵})^{۲} - ۱ = ۴$

$۱ = ۱ \to f(۱) = ۲(۱) + ۱ = ۳ \quad , \quad \frac{۱}{۲} < ۱ \to f\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۲\left(\frac{۱}{۲}\right) + ۱ = ۲$

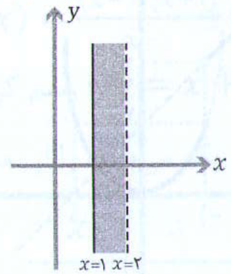
مثال ۲: ناحیه‌ای از صفحه را مشخص کنید که: الف) طول نقاط آن بزرگتر از یک باشد.

ب) طول نقاط آن از یک بزرگتر یا مساوی یک و از ۲ کوچکتر باشد.

حل:



$R = \{(x,y) | x > ۱\}$

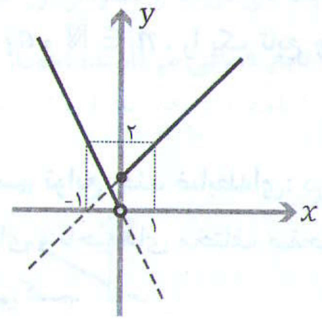


$R = \{(x,y) | ۱ \leq x < ۲\}$

نکته: برای رسم توابع چند ضابطه‌ای، هر ضابطه را به‌طور جداگانه رسم کرده و سپس آن قسمتی که در ناحیه مورد نظر باشد را نگه داشته و بقیه را حذف می‌کنیم.

مثال ۳: نمودار تابع مقابل را رسم کنید.
$$f(x) = \begin{cases} x + ۱ & x \geq ۰ \\ -۲x & x < ۰ \end{cases}$$

حل: ابتدا نمودار خط‌های $y = x + ۱$ و $y = -۲x$ را رسم می‌کنیم، سپس آن قسمتی که در ناحیه مورد نظر باشد را نگه داشته و بقیه را حذف می‌کنیم.



$y = x + ۱$

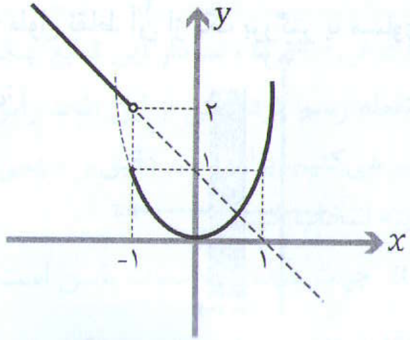
x	۰	۱
y	۱	۲

$y = -۲x$

x	۰	-۱
y	۰	۲

مثال ۴: نمودار تابع مقابل را رسم کنید.
$$f(x) = \begin{cases} x^۲ & x \geq -۱ \\ ۱ - x & x < -۱ \end{cases}$$

حل: ابتدا نمودار سهمی $y = x^۲$ و خط $y = ۱ - x$ را رسم می‌کنیم، سپس آن قسمتی که در ناحیه مورد نظر باشد را نگه داشته و بقیه را حذف می‌کنیم.



$y = x^۲$

x	-۱	۰	۱
y	۱	۰	۱

$y = ۱ - x$

x	-۱	۰
y	۲	۱

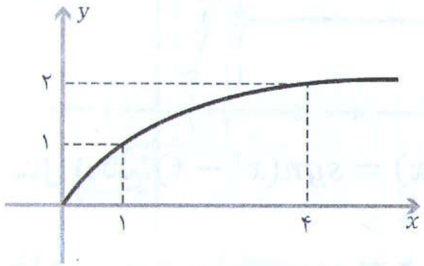
۴- رسم چند تابع پر کاربرد

۴- رسم چند تابع پر کاربرد: هرگاه از نمودار تابع اطلاعی نداشته باشیم، با پیدا کردن تعدادی از نقاط آن و وصل کردن آنها به یکدیگر، می‌توان نمودار را رسم کرد. قبل از رسم، باید دامنه تابع را مشخص کنیم. در مثال‌های زیر، مشابه چند نوع تابع که بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد، رسم شده است.

مثال ۱: نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را رسم کنید.

حل: $D_f = [۰, +\infty)$

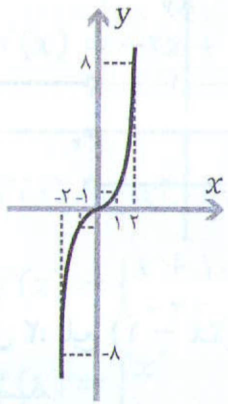
x	۰	۱	۴	۹	۱۶	...
$f(x)$	۰	۱	۲	۳	۴	...



مثال ۲: نمودار تابع $f(x) = x^۳$ را رسم کنید.

حل: $D_f = \mathbb{R}$

x	...	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	...
$f(x)$	...	-۲۷	-۸	-۱	۰	۱	۸	۲۷	...

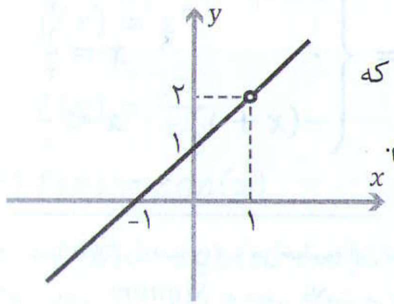


مثال ۳: نمودار تابع $f(x) = \frac{x^۲-۱}{x-۱}$ را رسم کنید.

حل: $D_f = \mathbb{R} - \{۱\}$

$$x \neq ۱ \to f(x) = \frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱} = x + ۱$$

ابتدا خط $y = x + ۱$ را رسم کرده، سپس نقطه‌ای که طول آن برابر یک می‌باشد را از نمودار حذف می‌کنیم.

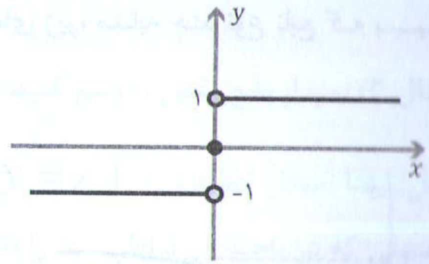


$y = x + ۱$

x	-۱	۰
y	۰	۱

۵- تابع علامت: تابع سه ضابطه‌ای زیر را تابع علامت می‌گویند و آن را با نماد $sgn(x)$ نمایش می‌دهند.(۱)

$$f(x) = sgn(x) = \begin{cases} ۱ & x > ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ -۱ & x < ۰ \end{cases}$$

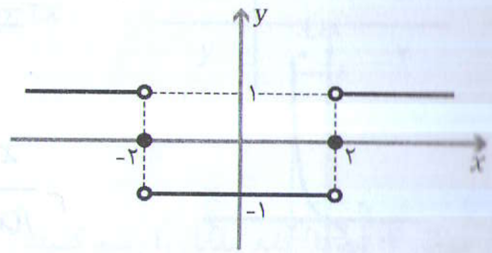


مثال ۱: تابع $f(x) = sgn(x^۲ - ۴)$ را رسم کنید.

حل:

$$f(x) = sgn(x^۲ - ۴) = \begin{cases} ۱ & x^۲ - ۴ > ۰ \\ ۰ & x^۲ - ۴ = ۰ \\ -۱ & x^۲ - ۴ < ۰ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ۱ & x < -۲ \text{ یا } ۲ < x \\ ۰ & x = \pm ۲ \\ -۱ & -۲ < x < ۲ \end{cases}$$



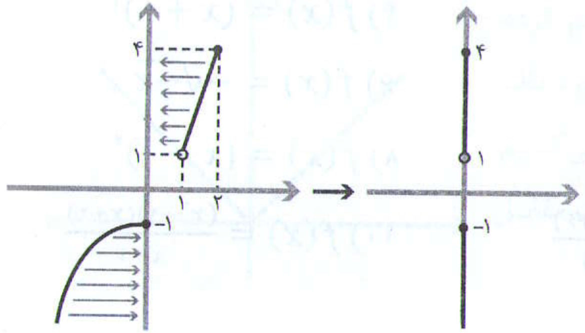
مثال ۲: تابع $f(x) = (x + ۱)sgn(۲x - ۱)$ را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای بنویسید.

حل:

$$f(x) = (x + ۱)\begin{cases} ۱ & ۲x - ۱ > ۰ \\ ۰ & ۲x - ۱ = ۰ \\ -۱ & ۲x - ۱ < ۰ \end{cases} = \begin{cases} x + ۱ & x > \frac{۱}{۲} \\ ۰ & x = \frac{۱}{۲} \\ -(x + ۱) & x < \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

۱- نماد sgn را «ساین x» می‌خوانیم. این نماد از کلمه انگلیسی $Sign$ گرفته شده است که ریشه اصلی آن، کلمه یونانی $Signum$ به معنی علامت می‌باشد.

۶- تعیین برد تابع به کمک نمودار: درحالت کلی تعیین برد تابع، کار دشواری است. یکی از روش‌های ساده برای تعیین برد تابع حقیقی، کمک گرفتن از نمودار آن می‌باشد. برای این منظور، کافی است تصویر نمودار را بر روی محور yها در نظر بگیریم. به عنوان نمونه، برد یک تابع از روی نمودار آن، در زیر مشخص شده است.



$$R_f = (-\infty, -۱] \cup (۱, ۴]$$

مثال ۱: برد توابعی که در مثال‌های قبل نمودار آنها رسم شد، به صورت زیر می‌باشد.

۱) $f(x) = -۲x + ۱$, $R_f = \mathbb{R}$

۲) $f(x) = ۲$, $R_f = \{۲\}$

۳) $f(x) = \frac{۱}{۲}x^۲ - ۱$, $R_f = [-۱, +\infty)$

۴) $f(x) = \begin{cases} x + ۱ & x \geq ۰ \\ -۲x & x < ۰ \end{cases}$, $R_f = (۰, +\infty)$

۵) $f(x) = \begin{cases} x^۲ & x \geq ۰ \\ ۱ - x & x < ۰ \end{cases}$, $R_f = [۰, +\infty)$

۶) $f(x) = \sqrt{x}$, $R_f = [۰, +\infty)$

۷) $f(x) = x^۳$, $R_f = \mathbb{R}$

۸) $f(x) = \frac{x^۲ - ۱}{x - ۱}$, $R_f = \mathbb{R} - \{۲\}$

۹) $f(x) = sgn(x)$, $R_f = \{-۱, ۰, ۱\}$

۱۰) $f(x) = sgn(x^۲ - ۴)$, $R_f = \{-۱, ۰, ۱\}$

تمرین

۱- نمودار هر تابع را رسم و به کمک آن، برد تابع را مشخص کنید.

۱) $f(x) = -2x + 1$ ‏ ۲) $f(x) = 2x^2 - 4x$

۳) $f(x) = (x-1)(2-x)$ ‏ ۴) $f(x) = (x+1)^2$

۵) $f(x) = \sqrt{x-2}$ ‏ ۶) $f(x) = -\sqrt{-x}$

۷) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ ‏ ۸) $f(x) = (x-1)^3$

۹) $f(x) = \dfrac{(x^2-4x+3)(x^2-5x+6)}{(x-3)(x^2-3x+2)}$ ‏ ۱۰) $f(x) = \dfrac{(x^2-1)(x+2)}{x+1}$

۲- نمودار توابع چند ضابطه‌ای زیر را رسم کنید.

۱) $f(x) = \begin{cases} 2 & 1 \le x \\ x & -1 < x < 1 \\ -2 & x \le -1 \end{cases}$ ‏ ۲) $f(x) = \begin{cases} x-1 & 2 < x \\ 1 & -2 \le x \le 2 \\ -x-1 & x < -2 \end{cases}$

۳) $f(x) = \begin{cases} 1-x & 0 \le x \\ 2x & x < 0 \end{cases}$ ‏ ۴) $f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 \le x \\ 2x+1 & x < -1 \end{cases}$

۵) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & 0 < x \\ x^2+x & x \le 0 \end{cases}$ ‏ ۶) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 1 \le x \\ -x & x < 1 \end{cases}$

۳- با توجه به تعریف تابع علامت، توابع زیر را رسم کنید.

۱) $f(x) = sgn(9-x^2)$ ‏ ۲) $f(x) = x\,sgn(x+1)$

۳) $f(x) = x^2 + sgn(x)$ ‏ ۴) $f(x) = sgn(x-1) + sgn(2-x)$

۴- مقادیر a ، b و c را چنان تعیین کنید که نمودار تابع f، از نقاط داده شده بگذرد.

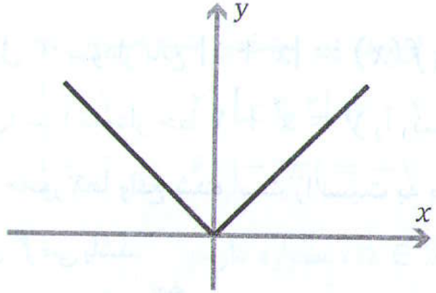
۱) $f(x) = 3x^2 + ax - 2b$ ‏ $A(1,-1)$ ، $B(2,1)$

۲) $f(x) = 2x^3 - ax^2 + bx + c$ ‏ $A(-1,4)$ ، $B(1,2)$ ، $C(0,1)$

۷- تابع قدر مطلق: تابع قدر مطلق یک تابع دو ضابطه‌ای به صورت زیر است.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \ge 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

برای رسم نمودار این تابع، دو تابع $y = x$ و $y = -x$ (نیمساز ناحیه اول و سوم و نیمساز ناحیه دوم و چهارم) را رسم کرده، سپس آن قسمتی که در ناحیه مورد نظر باشد را نگه داشته و بقیه را حذف می‌کنیم. در پایان نمودار این تابع به صورت مقابل می‌شود.



مثال ۱: تابع $f(x) = |2x - 4|$ را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای بنویسید.

حل:

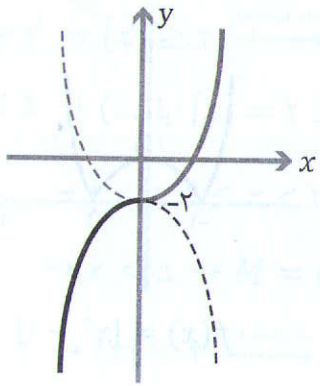
$$f(x) = |2x-4| = \begin{cases} 2x-4 & 2x-4 \ge 0 \\ -(2x-4) & 2x-4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x-4 & x \ge 2 \\ -2x+4 & x < 2 \end{cases}$$

مثال ۲: تابع $f(x) = x|x| - 2$ را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای بنویسید، سپس نمودار آن را رسم کنید.

حل:

$$f(x) = -2 + x\begin{cases} x & x \ge 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} -2 + x^2 & x \ge 0 \\ -2 - x^2 & x < 0 \end{cases}$$

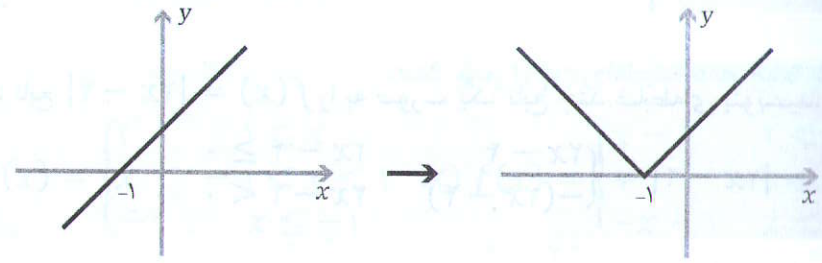
برای رسم نمودار این تابع، دو تابع $y = x^2 - 2$ و $y = -x^2 - 2$ که دو سهمی می‌باشند را رسم کرده، سپس آن قسمتی که در ناحیه مورد نظر باشد را نگه داشته و بقیه را حذف می‌کنیم. در پایان نمودار این تابع به صورت مقابل می‌شود.



نکته: هرگاه نمودار تابع $g(x)$ داده شده باشد و نمودار تابع $f(x) = |g(x)|$ را لازم داشته باشیم، کافی است قسمتی از نمودار g که در زیر محور xها قرار دارد را نسبت به محور xها قرینه کنیم. شکل جدید، نمودار تابع f می‌باشد.

مثال ۳: نمودار تابع $f(x) = |x + ۱|$ را رسم کنید.

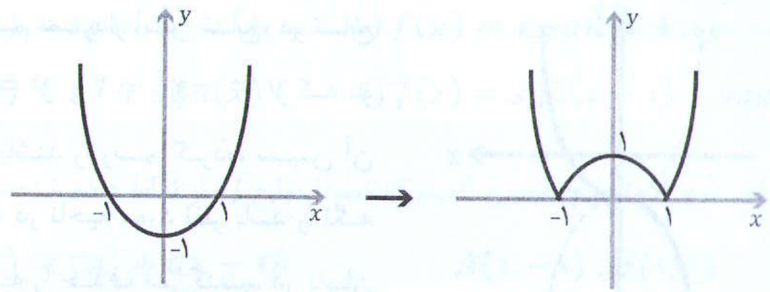
حل: ابتدا نمودار خط $y = x + ۱$ را رسم می‌کنیم؛ سپس قسمتی از خط را که در زیر محور xها واقع شده است را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. شکل جدید، نمودار تابع f می‌باشد.



$y = x + ۱$ $\qquad$ $f(x) = |x + ۱|$

مثال ۴: نمودار تابع $f(x) = |x^۲ - ۱|$ را رسم کنید.

حل: ابتدا نمودار سهمی $y = x^۲ - ۱$ را رسم می‌کنیم، سپس قسمتی از سهمی را که در زیر محور xها واقع شده است را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. شکل جدید، نمودار تابع f می‌باشد.



$y = x^۲ - ۱$ $\qquad$ $f(x) = |x^۲ - ۱|$

۸- تابع جزء صحیح: ابتدا مفهوم جزء صحیح یک عدد را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱: برای هر عدد حقیقی x، عددی صحیح مانند n موجود است به‌طوری‌که: $n \leq x < n + ۱$. عدد n را **جزء صحیح** x گوییم و با نماد $[x] = n$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱: جزء صحیح چند عدد بر اساس تعریف آن، در زیر مشخص شده است.

۱) $[۲] = ۲$ $\quad$ ۲) $[-۳/۲] = -۴$ $\quad$ ۳) $[۴/۵] = ۴$ $\quad$ ۴) $[e] = ۲$

۵) $\left[\frac{۵}{۲}\right] = ۲$ $\quad$ ۶) $[-۲\pi] = -۷$ $\quad$ ۷) $\left[\frac{\pi}{۲}\right] = ۱$ $\quad$ ۸) $[\sqrt{۳}] = ۱$

خواص مهم جزء صحیح: هرگاه $x \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{Z}$، همواره داریم:

۱) $[x + n] = [x] + n$ $\quad$ ۲) $[x] \leq x < [x] + ۱$ $\quad$ ۳) $x - ۱ < [x] \leq x$

مثال ۲: مجموعه جواب معادلات و نامعادلات زیر را به‌دست آورید.

۱) $[x] = ۳ \rightarrow ۳ \leq x < ۴ \rightarrow M = [۳, ۴)$

۲) $\left[\frac{x-۱}{۲}\right] = ۱ \rightarrow ۱ \leq \frac{x-۱}{۲} < ۲ \rightarrow ۳ \leq x < ۵ \rightarrow M = [۳, ۵)$

۳) $۲[۲x + ۱] = ۳ \rightarrow [۲x + ۱] = \frac{۳}{۲} \rightarrow M = \emptyset$ $\quad$ (زیرا $\frac{۳}{۲} \notin \mathbb{Z}$)

۴) $[x] \geq ۳ \rightarrow$ ($[x] = ۳$ یا $[x] = ۴$ یا $[x] = ۵$ یا ...)

$\rightarrow$ ($۳ \leq x < ۴$ یا $۴ \leq x < ۵$ یا $۵ \leq x < ۶$ یا ...)

$\rightarrow ۳ \leq x \rightarrow M = [۳, +\infty)$

۵) $[x] > ۳ \rightarrow [x] \geq ۴ \xrightarrow{\text{مشابه قسمت قبل}} x \geq ۴ \rightarrow M = [۴, +\infty)$

۶) $[x] < ۵ \rightarrow$ (... یا $[x] = ۲$ یا $[x] = ۳$ یا $[x] = ۴$)

$\rightarrow$ (... یا $۲ \leq x < ۳$ یا $۳ \leq x < ۴$ یا $۴ \leq x < ۵$)

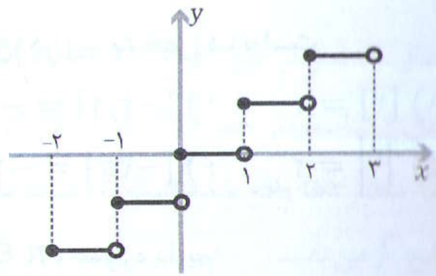
$\rightarrow x < ۵ \rightarrow M = (-\infty, ۵)$

۷) $[x] \leq ۲ \rightarrow [x] < ۳ \xrightarrow{\text{مشابه قسمت قبل}} x < ۳ \rightarrow M = (-\infty, ۳)$

- با ذکر چند مثال، با روش رسم توابع شامل جزء صحیح آشنا می‌شویم. این نوع توابع دارای تعداد نامتناهی ضابطه هستند، لذا ما قسمتی از آنها را رسم می‌کنیم.

مثال ۳: نمودار تابع $f(x) = [x]$ به صورت زیر می‌باشد.

$$f(x) = [x] = \begin{cases} \vdots & \\ -2 & -2 \le x < -1 \\ -1 & -1 \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < 2 \\ 2 & 2 \le x < 3 \\ \vdots & \end{cases}$$

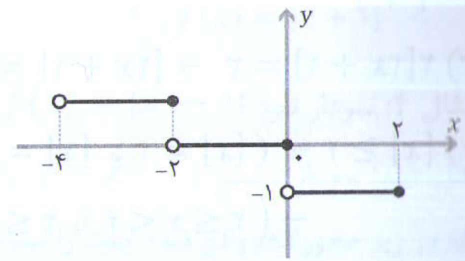


مثال ۴: نمودار تابع $f(x) = \left[-\frac{x}{2}\right]$ را در یک فاصله دلخواه رسم کنید.

حل:

$$f(x) = \begin{cases} \vdots & \\ -1 & -1 \le -\frac{x}{2} < 0 \\ 0 & 0 \le -\frac{x}{2} < 1 \\ 1 & 1 \le -\frac{x}{2} < 2 \\ \vdots & \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \vdots & \\ -1 & 0 < x \le 2 \\ 0 & -2 < x \le 0 \\ 1 & -4 < x \le -2 \\ \vdots & \end{cases}$$

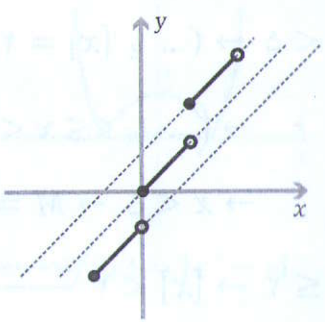


مثال ۵: نمودار تابع $f(x) = x + [x]$ را در فاصله $[-1,2)$ رسم کنید.

حل:

$$f(x) = x + \begin{cases} -1 & -1 \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x-1 & -1 \le x < 0 \\ x & 0 \le x < 1 \\ x+1 & 1 \le x < 2 \end{cases}$$



۹- انتقال توابع:

هرگاه نمودار تابع $f(x)$ داده شده باشد و a یک عدد مثبت باشد با انتقال نمودار تابع $f(x)$، توابع زیر را می‌توان رسم کرد.

۱) **نمودار تابع $y = f(x) + a$**: نمودار f به اندازه a واحد به موازات محور yها به سمت **بالا** منتقل می‌شود.

۲) **نمودار تابع $y = f(x) - a$**: نمودار f به اندازه a واحد به موازات محور yها به سمت **پایین** منتقل می‌شود.

۳) **نمودار تابع $y = f(x + a)$**: نمودار f به اندازه a واحد به موازات محور xها به سمت **چپ** منتقل می‌شود.

۴) **نمودار تابع $y = f(x - a)$**: نمودار f به اندازه a واحد به موازات محور xها به سمت **راست** منتقل می‌شود.

۵) **نمودار تابع $y = -f(x)$**: نمودار تابع f نسبت به **محور xها قرینه** می‌شود.

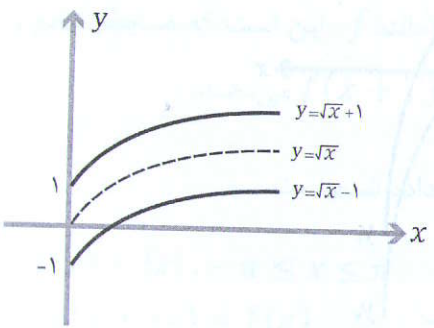
۶) **نمودار تابع $y = f(-x)$**: نمودار تابع f نسبت به **محور yها قرینه** می‌شود.

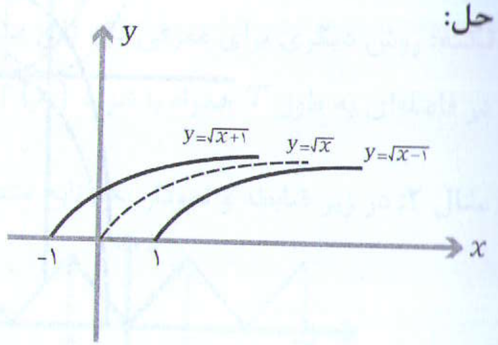
مثال ۱: با توجه به نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

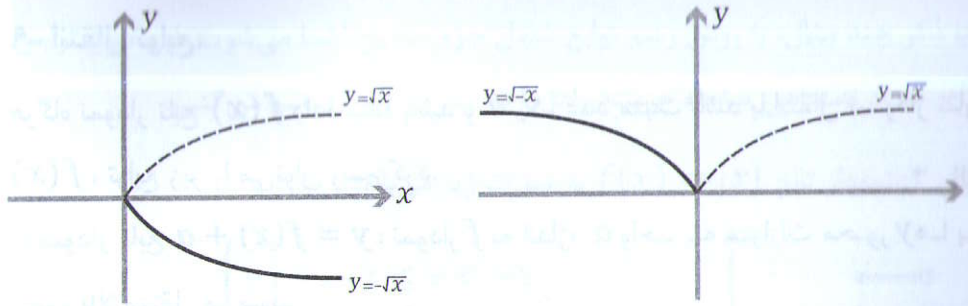
۱) $y = \sqrt{x} + 1$ ۲) $y = \sqrt{x} - 1$ ۳) $y = \sqrt{x-1}$

۴) $y = \sqrt{x+1}$ ۵) $y = -\sqrt{x}$ ۶) $y = \sqrt{-x}$

حل:







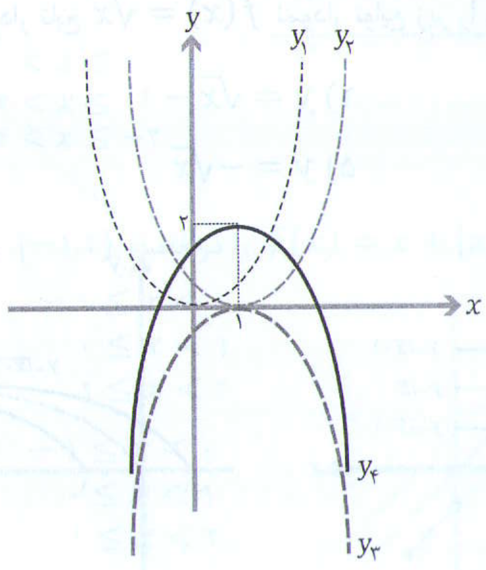
مثال ۲: نمودار تابع $f(x) = ۲ - (x - ۱)^{۲}$ را به کمک انتقال رسم کنید.

حل: الف) نمودار تابع $y_{۱} = x^{۲}$ را رسم می‌کنیم.

ب) نمودار تابع $y_{۱}$ را به اندازه یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار $y_{۲} = (x - ۱)^{۲}$ به‌دست آید.

ج) نمودار تابع $y_{۲}$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y_{۳} = -(x - ۱)^{۲}$ حاصل شود.

د) نمودار تابع $y_{۳}$ را به اندازه ۲ واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار $y_{۴} = ۲ - (x - ۱)^{۲}$ حاصل شود.



۱۰- تابع متناوب:

تعریف ۱: تابع f را **متناوب** گوییم هرگاه عددی حقیقی مانند $t \neq ۰$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم: $x + t \in D_f$ و $f(x+t) = f(x)$

کوچکترین عددحقیقی مثبت t را در صورت وجود، **دوره تناوب اصلی** تابع f گوییم و با T نمایش می‌دهیم.

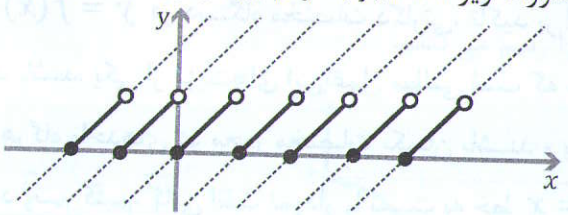
نکته: ویژگی مهم توابع متناوب این است که نمودار تابع در فاصله‌های متوالی به طول T تکرار می‌شود. لذا برای رسم این توابع، نمودار را در یک فاصله به طول دوره تناوب رسم کرده، سپس شکل به‌دست آمده را در فاصله‌های مشابه تکرار می‌کنیم.

مثال ۱: دامنه تابع $f(x) = x - [x]$ برابر $\mathbb{R}$ است و برای هر $n \in \mathbb{Z}$ (بنابر خاصیت‌های جزء صحیح یک عدد) داریم:

$$f(x+n) = (x+n) - [x+n] = (x+n) - ([x]+n) = x - [x] = f(x)$$

بنابراین تابع f متناوب و هر عدد صحیح غیر صفر n، دوره تناوب این تابع می‌باشد. چون کوچکترین عدد صحیح مثبت، عدد یک می‌باشد، پس دوره تناوب اصلی $T = ۱$ است.

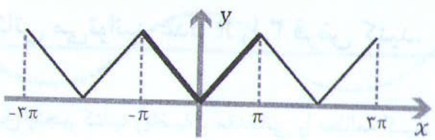
نمودار این تابع به صورت زیر است (جزئیات رسم این نمودار را در تمرین‌ها، به خواننده واگذار کرده‌ایم).



نکته: روش دیگری برای معرفی یک تابع متناوب مانند f، این است که ضابطه تابع را در فاصله‌ای به طول T همراه با شرط $f(x+T) = f(x)$ می‌دهند.

مثال ۲: در زیر ضابطه و نمودار یک تابع متناوب داده شده است.

$$f(x) = |x| \,،\, -\pi \leq x \leq \pi$$
$$f(x + ۲\pi) = f(x)$$



تمرین

۱- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $f(x) = 2|x-1|$ 　 ۲) $f(x) = \frac{1}{2}|x-1| + 1$

۳) $f(x) = x + |x+1|$ 　 ۴) $f(x) = x|x|$

۵) $f(x) = |x^2 - 4x|$ 　 ۶) $f(x) = |x||x+1|$

۷) $f(x) = |x| - |x-1|$ 　 ۸) $f(x) = 2|x| + |x-1|$

۲- معادلات زیر را حل کنید.

۱) $[2x+1] = 5$ 　 ۲) $\left[\frac{x-3}{2}\right] = -1$ 　 ۳) $-2[x^2+3] = 1$

۴) $\left[x + [x]\right] = 4$ 　 ۵) $[|x|] = 0$ 　 ۶) $|[x]| = 1$

۳- نامعادلات زیر را حل کنید.

۱) $[x] \geq 2$ 　 ۲) $[x] > -2$ 　 ۳) $[x] \leq 5$ 　 ۴) $[x] < -5$

۴- نمودار توابع زیر را در یک فاصله دلخواه و مناسب رسم کنید.

۱) $f(x) = \left[\frac{1}{2}x\right]$ 　 ۲) $f(x) = -[x+1]$

۳) $f(x) = -2[x] + 1$ 　 ۴) $f(x) = x - [x]$

۵) $f(x) = x[x]$ 　 ۶) $f(x) = |[x]|$

۷) $f(x) = |x| - [x]$ 　 ۸) $f(x) = |[sgn\, x]|$

۹) $f(x) = (-1)^{[x]}$ 　 ۱۰) $f(x) = [x] + [-x]$

۵- دامنه توابع زیر را مشخص کنید.

۱) $f(x) = \frac{x+1}{[x]+1}$ 　 ۲) $f(x) = \frac{x-1}{2[x]-1}$

۳) $f(x) = \sqrt{[x] - 3}$ 　 ۴) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{5-[x]}}$

۶- با توجه به نمودار تابع $f(x) = |x|$ ، با انتقال توابع زیر را رسم کنید.

۱) $f(x) = -|x| + 2$ 　 ۲) $f(x) = |x+1| - 2$

۷- با توجه به نمودار تابع $f(x) = x^2$ ، با انتقال توابع زیر را رسم کنید.

۱) $f(x) = (x-1)^2 - 1$ 　 ۲) $f(x) = 2 - (x+1)^2$

۸- نمودار توابع متناوب زیر را رسم کنید.

۱) $f(x) = x \ ، \ -\pi < x \leq \pi$ ، $f(x + 2\pi) = f(x)$ 　 ۲) $f(x) = x^2, \ -1 \leq x < 1$ ، $f(x+2) = f(x)$

۹- ثابت کنید توابع زیر متناوب هستند و دوره تناوب اصلی آنها را معرفی کنید.

۱) $f(x) = sin(4x + 1)$ 　 ۲) $f(x) = tan(-2x)$

۱۰- نمودار توابع زیر را در یک فاصله به طول دوره تناوب، رسم کنید.

۱) $f(x) = 1 - sin\, x$ 　 ۲) $f(x) = 2\, cos\, x + 1$

۳) $f(x) = \frac{1}{2} cot\, x$ 　 ۴) $f(x) = -\, tan\, x$

۵) $f(x) = |1 - cos\, x|$ 　 ۶) $f(x) = \left|\frac{1}{2} - sin\, x\right|$

۱۱- با توجه به نمودار توابع اساسی مثلثات و به کمک انتقال، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $f(x) = sin(x + \frac{\pi}{2})$ 　 ۲) $f(x) = cos(x - \frac{\pi}{2})$

۳) $f(x) = tan(x - \frac{\pi}{2})$ 　 ۴) $f(x) = cot(x + \frac{\pi}{2})$

۵) $f(x) = 1 - cos(x - \frac{\pi}{3})$ 　 ۶) $f(x) = 1 - sin(x + \frac{\pi}{3})$

۱۴- تابع صعودی و تابع نزولی:

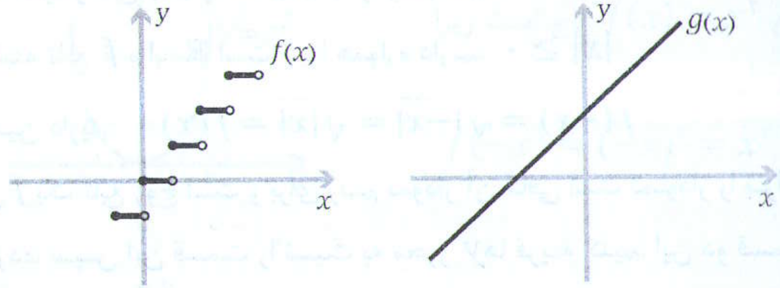
تعریف ۱: تابع f را **صعودی** می‌گوییم هرگاه با افزایش x، مقدار y نیز افزایش یابد یا ثابت بماند. یعنی:

$$\forall\, a,b \in D_f :\ a < b\ \rightarrow f(a) \leq f(b)$$ [1]

و تابع f را **اکیداً صعودی** می‌گوییم هرگاه با افزایش x، مقدار y نیز افزایش یابد. یعنی:

$$\forall\, a,b \in D_f :\ a < b\ \rightarrow f(a) < f(b)$$

مثال ۱: تابع $f(x) = [x]$ صعودی و تابع $g(x) = ۲x + ۱$ اکیداً صعودی می‌باشند.



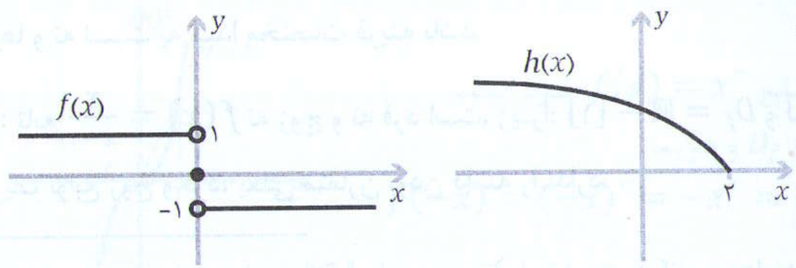
تعریف ۲: تابع f را **نزولی** می‌گوییم هرگاه با افزایش x، مقدار y کاهش یابد یا ثابت بماند. یعنی:

$$\forall\, a,b \in D_f :\ a < b\ \rightarrow f(a) \geq f(b)$$

و تابع f را **اکیداً نزولی** می‌گوییم هرگاه با افزایش x، مقدار y کاهش یابد. یعنی:

$$\forall\, a,b \in D_f :\ a < b\ \rightarrow f(a) > f(b)$$

مثال ۲: تابع $f(x) = -sgn(x)$ نزولی و تابع $h(x) = \sqrt{۲ - x}$ اکیداً نزولی می‌باشند.

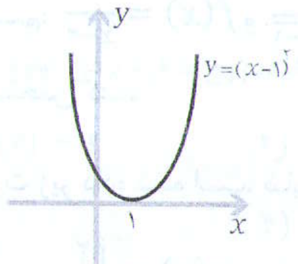


۱- علامت $\forall$ از ابتدای کلمه All به معنای همه گرفته شده است و می‌خوانیم: «به ازای هر».

مثال ۳: تابع ثابت $f(x) = c$ بر اساس تعریف، هم صعودی و هم نزولی می‌باشد.

تذکر: ممکن است یک تابع در فاصله‌ای صعودی و در فاصله‌ای دیگر نزولی باشد.

مثال ۴: تابع $f(x) = (x-۱)^۲$ در فاصله $(-\infty, ۱]$ اکیداً نزولی و در فاصله $[۱, +\infty)$ اکیداً صعودی می‌باشد.



مثال ۵: به کمک تعریف نشان دهید تابع $f(x) = \frac{-۱}{۲x}$ برای $x > ۰$ اکیداً صعودی است.

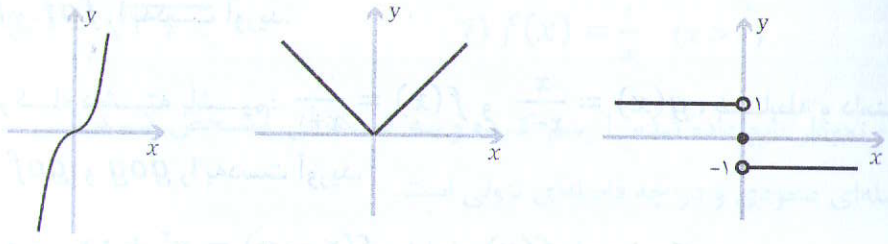
حل: فرض کنید $۰ < a < b$، بنابر خاصیت نامساوی‌ها داریم:

$$۰ < ۲a < ۲b \rightarrow ۰ < \frac{۱}{۲b} < \frac{۱}{۲a} \rightarrow \frac{-۱}{۲a} < \frac{-۱}{۲b} \rightarrow f(a) < f(b)$$

بنابراین تابع f در فاصله $(۰, +\infty)$ اکیداً صعودی می‌باشد.

تعریف ۳: تابعی که فقط صعودی یا فقط نزولی باشد تابع **یکنوا** می‌گویند. هم‌چنین تابعی را که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، **اکیداً یکنوا** می‌گویند.

نکته: تابعی که اکیداً یکنوا باشد هر خط موازی محور xها، آن را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند (از این نکته به زودی در تشخیص یک‌به‌یک بودن تابع استفاده خواهیم کرد).



یکنوا — غیر یکنوا — اکیداً یکنوا

تمرین

۱- هرگاه داشته باشیم: $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{۱ - x}$ ، دامنه و ضابطه توابع $f + g$ ، $f.g$ ، $\frac{f}{g}$ و $\frac{g}{f}$ را مشخص کنید.

۲- هرگاه داشته باشیم: $f(x) = \frac{۱}{x-۳}$ و $g(x) = \frac{۱}{\sqrt{x-۱}}$ ، دامنه و ضابطه توابع $f - g$ ، $\frac{f}{g}$ و $\frac{g}{f}$ را مشخص کنید.

۳-توابع f و g به صورت زیر داده شده است، ضابطه تابع $f + g$ را به‌دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} x - ۳ & x \geq ۳ \\ x & x < ۳ \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} ۲ & x \geq ۱ \\ ۲x & x < ۱ \end{cases}$$

۴- توابع f و g به صورت زیر داده شده است، ضابطه تابع $f.g$ را به‌دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{x-۱} & x > ۱ \\ x & x \leq ۱ \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} x^۲ - ۱ & x > ۲ \\ x - ۱ & x \leq ۲ \end{cases}$$

۵- هرگاه داشته باشیم: $f(x) = ۱ - x$ و $g(x) = x^۲ + bx + c$ ، مقادیر b و c را طوری پیدا کنید که: $fog(x) = -x^۲ + ۵x + ۴$

۶- هرگاه داشته باشیم: $f(x) = ۲x + ۱$ و $g(x) = ۳x - ۲$ ، حاصل $fog(x) - gof(x)$ را به‌دست آورید.

۷- هرگاه داشته باشیم: $f(x) = ۴ - x^۲$ و $g(x) = \sqrt{x}$ ، ضابطه و دامنه توابع fog و fof را به‌دست آورید.

۸- هرگاه داشته باشیم: $f(x) = \frac{۱}{x+۱}$ و $g(x) = \frac{x}{x-۲}$ ، ضابطه و دامنه توابع gof و gog را به‌دست آورید.

۹- با فرض $f(۲ - x) = x^۲ + ۲x$ ، ضابطه $f(x)$ را معرفی کنید.

۱۰- هرگاه داشته باشیم: $fog(x) = \frac{۱}{x}$ و $g(x) = \frac{x-۱}{x}$ ، ضابطه تابع f را مشخص کنید.

۱۱- با فرض $f(x) = ۲x + ۱$ و $fog(x) = x^۲ + ۲x + ۳$ ، ضابطه تابع g را به‌دست آورید.

۱۲- با توجه به تعریف تابع زوج و تابع فرد، زوج یا فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید.

۱) $f(x) = x^۲ + |x| - ۲$ ۲) $f(x) = x^۳ + x$

۳) $f(x) = \frac{x^۲+۱}{x}$ ۴) $f(x) = |x| \cos x$

۵) $f(x) = x^۳ \sqrt{x}$ ۶) $f(x) = |x| - x$

۱۳- اگر f تابعی زوج و g تابعی فرد باشد، با ذکر دلیل زوج یا فرد بودن توابع زیر را با فرض اینکه دامنه آنها متقارن باشد، مشخص کنید.

۱) $f.g$ ۲) $\frac{f}{g}$ ۳) fof ۴) gog ۵) gof ۶) fog

۱۴- به کمک خاصیت زوج یا فرد بودن تابع، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $f(x) = x^۲ - |x|$ ۲) $g(x) = x|x|$

۱۵- با توجه به تعریف تابع صعودی و نزولی، صعودی یا نزولی بودن توابع زیر را بررسی کنید.

۱) $f(x) = ۳ - ۲x$ ۲) $f(x) = x^۳ + ۲$

۳) $f(x) = \sqrt{۲ + x}$ ۴) $f(x) = \frac{۱}{x} \quad (x > ۰)$

۱۶- نمودار تابع داده شده را رسم کرده و به کمک آن، مشخص کنید تابع در چه فاصله‌ای صعودی و در چه فاصله‌ای نزولی است.

۱) $f(x) = ۴x^۲ - ۴x + ۱$ ۲) $f(x) = ۴x - ۴x^۲$

۱۷- تابع نمایی:

در کتاب ریاضیات مقدماتی مشاهده کردید که هرگاه a یک عدد حقیقی مثبت و غیر یک، و x یک عدد گویا باشد، منظور از عدد a^x چیست. برای یادآوری عبارات زیر را مرور کنید:

$$۲^۳ = ۲ \times ۲ \times ۲ \quad , \quad ۲^{-۲} = \frac{۱}{۲^۲} \quad , \quad ۲^{\frac{۲}{۳}} = \sqrt[۳]{۲^۲} \quad , \quad ۲^{\frac{-۱}{۳}} = \frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}$$

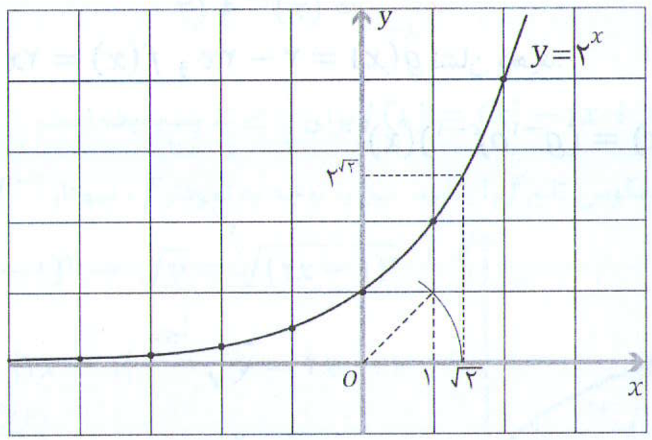
اکنون اعلام می‌کنیم که x می‌تواند یک عدد گنگ هم باشد؛ به عبارت دیگر a^x برای هر عدد حقیقی x قابل تعریف است. به کمک نمودار $y = a^x$، می‌توانیم تصور بهتری از مقدار a^x داشته باشیم.

تعریف ۱: هرگاه a یک عدد حقیقی مثبت و غیر یک باشد، تابع با ضابطه $f(x) = a^x$ را **تابع نمایی** می نامند[1].

مثال ۱: ابتدا نمودار تابع $f(x) = ۲^x$ را به روش نقطه‌یابی رسم کنید، سپس مقدار $۲^{\sqrt{۲}}$ را بر روی محور yها مشخص کنید.

حل: برای رسم به روش نقطه‌یابی، جدول زیر را تنظیم و سپس نمودار را رسم کرده‌ایم.

x	...	۳-	۲-	۱-	۰	۱	۲	۳	...
$f(x)$	...	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴	۸	...

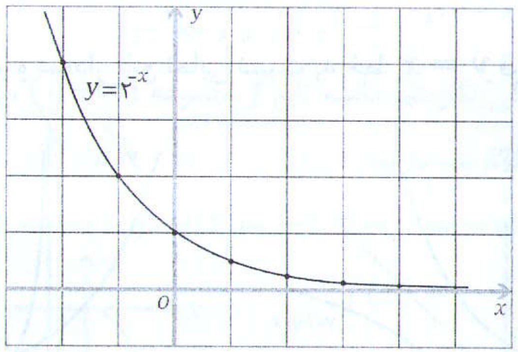


۱- در ریاضیات پیشرفته، ابتدا به کمک انتگرال تابع لگاریتم را تعریف می‌کنند؛ سپس تابع نمایی، به عنوان معکوس تابع لگاریتم معرفی می‌شود. توضیح مختصری برای این مطلب در فصل ششم ، در زیر عنوان «آشنایی بیشتر با اولین قضیه اساسی حساب» آمده است.

مثال ۲: نمودار تابع $f(x) = (\frac{۱}{۲})^x$ را رسم کنید.

حل: تابع $f(x) = (\frac{۱}{۲})^x$ را می‌توان به صورت $f(x) = ۲^{-x}$ در نظر گرفت. مشابه مثال قبل جدول زیر را تنظیم و سپس نمودار را رسم کرده‌ایم.

x	...	۳-	۲-	۱-	۰	۱	۲	۳	...
$f(x)$	...	۸	۴	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$	...



چند نکته در مورد تابع نمایی:

۱- در دو مثال فوق مشاهده می‌کنید فاصله منحنی f و خط $y = ۰$ از یک سمت، مرتب کاهش پیدا می‌کند ولی آن را قطع نمی‌کند؛ در این حالت خط $y = ۰$ را مجانب افقی[1] تابع f می‌گویند.

۲- دامنه تابع $f(x) = a^x$ برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد و برد آن با توجه به دو مثال فوق، فاصله $(۰, +\infty)$ است.

۳- در تابع $f(x) = a^x$، اگر $a > ۱$ تابع اکیداً صعودی و اگر $۰ < a < ۱$ تابع اکیداً نزولی می باشد.

۴- تابع $f(x) = a^x$ یک‌به‌یک است، لذا دارای تابع معکوس می باشد.

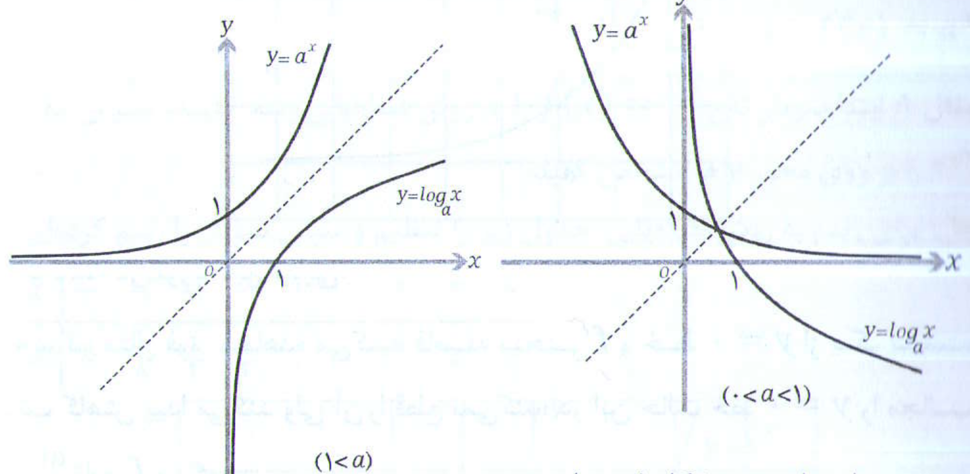
۱- همان‌طور که هنگام رسم توابع اساسی مثلثات متذکر شدیم، تعریف دقیق‌تر مجانب افقی و قائم یک تابع، در فصل دوم (فصل حد و پیوستگی) مطرح می‌شود.

۱۸- تابع لگاریتم:

تابع $f(x) = a^x$ یک‌به‌یک است؛ بنابراین دارای تابع معکوس می‌باشد. معکوس این تابع را، **تابع لگاریتم** نامیده و با نماد $f^{-۱}(x) = Log_a x$ نمایش می‌دهیم. با توجه به خواص تابع معکوس داریم:

۱- $D_{f^{-۱}} = R_f = (۰, +\infty)$ ، بنابراین تابع لگاریتم فقط برای اعداد حقیقی مثبت قابل تعریف است.

۲- نمودار تابع لگاریتم و نمودار تابع نمایی نسبت به خط $y = x$ قرینه‌اند، لذا داریم:



هم‌چنین با مشاهده دو شکل فوق داریم:

۳- فاصله نمودار تابع لگاریتم و خط $x = ۰$ از یک سمت مرتب کاهش می‌یابد ولی این دو هم‌دیگر را قطع نمی‌کنند؛ در این حالت خط $x = ۰$ را مجانب قائم تابع می‌گویند.

۴- در تابع $y = Log_a x$ ، هرگاه $a > ۱$ تابع اکیداً صعودی و اگر $۰ < a < ۱$ تابع اکیداً نزولی می‌باشد (از این مطلب برای حل نامعادلات لگاریتمی استفاده می‌شود).

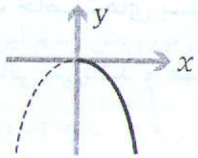
نکته: هرگاه در تابع لگاریتم به جای عدد a ، عدد گنگ e را قرار دهیم، تابع $y = e^x$ را **تابع نمایی طبیعی** می‌نامند. هم‌چنین تابع $y = Log_e x$ را با $y = ln\,x$ نمایش داده و آن را **تابع لگاریتم طبیعی** می‌گویند. علت به کاربردن پسوند طبیعی برای این توابع این است که در بسیاری از مدل‌های ریاضی پدیده‌های طبیعی مانند رشد جمعیت و محاسبه شدت زلزله، این توابع حضور دارند. خواصی که در مورد اعداد توان‌دار و لگاریتم در کتاب ریاضیات مقدماتی ذکر شد، در مورد توابع نمایی و لگاریتمی نیز برقرار است.

مثال ۱: نمودار تابع $f(x) = -۹^{Log_۳ x}$ را رسم کنید.

حل: با توجه به ویژگی لگاریتم، دامنه تابع f مجموعه $(۰, +\infty)$ می‌باشد. با استفاده از خاصیت‌های توان و لگاریتم داریم:

$$f(x) = -۹^{Log_۳ x} = -(۳^۲)^{Log_۳ x} = -۳^{۲Log_۳ x} = -۳^{Log_۳ x^۲} = -x^۲$$

نمودار تابع $f(x) = -x^۲$ برای $x > ۰$ به صورت مقابل است:



مثال ۲: با فرض اینکه تابع $f(x) = ۱ + ۲^{-x}$ یک‌به‌یک است، ضابطه معکوس این تابع را به‌دست آورید.

حل: با توجه به روش یافتن تابع معکوس، داریم:

$$۱)\ y = ۱ + ۲^{-x} \to ۲^{-x} = y - ۱ \to Log_۲(۲^{-x}) = Log_۲(y - ۱)$$

$$\to -x\,Log_۲ ۲ = Log_۲(y - ۱) \xrightarrow{Log_۲ ۲ = ۱} x = -Log_۲(y - ۱)$$

$$۲)\ y = -Log_۲(x - ۱) \qquad ۳)\ f^{-۱}(x) = -Log_۲(x - ۱)$$

مثال ۳: دامنه تابع $f(x) = Log_۲(\frac{۳-x}{x+۱})$ را مشخص کنید.

حل: با توجه به اینکه تابع لگاریتم فقط برای اعداد حقیقی مثبت قابل تعریف است، دامنه این تابع، مجموعه جواب نامعادله $\frac{۳-x}{x+۱} > ۰$ می‌باشد. پس از حل این نامعادله به کمک جدول تعیین علامت داریم: $D_f = (-۱, ۳)$

تمرین

۱- نمودار توابع زیر را رسم کنید (برای اینکه رسم توابع ساده‌تر انجام شود مبنای تابع لگاریتم و پایه تابع نمایی عدد ۲ انتخاب شده است).

۱) $f(x) = -2^{x+1}$ ۲) $f(x) = Log_2(x+1)$

۳) $f(x) = |Log_2 x|$ ۴) $f(x) = |2^x - 1|$

۵) $f(x) = sgn(2^x)$ ۶) $f(x) = sgn(Log_2 x)$

۷) $f(x) = log_2|x|$ ۸) $f(x) = [2^x]\ ,\ (x \le 1)$

۹) $f(x) = 2^{Log_2 x}$ ۱۰) $f(x) = 4^{Log_2 x}$

۲- یک‌به‌یک بودن توابع زیر را بررسی کرده و برای توابع یک به یک، ضابطه تابع معکوس را معرفی کنید.

۱) $f(x) = 2^{3x+1}$ ۲) $f(x) = e^{-x} - 1$

۳) $f(x) = 2 + Ln\, x$ ۴) $f(x) = 2\, Log_2(x+2)$

۵) $f(x) = Log_2(x+2)^4$ ۶) $f(x) = 2^{|x|} + 3$

۳- دامنه توابع زیر را مشخص کنید.

۱) $f(x) = Log_2(\frac{x-1}{2x})$ ۲) $f(x) = Ln(|x| - 2)$

۳) $f(x) = \sqrt{Ln\, x}$ ۴) $f(x) = \sqrt{Log_{0.5}(x-1)}$

۴- زوج یا فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید.

۱) $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$ ۲) $f(x) = Ln(\frac{1+x}{1-x})$

۵- درستی خواص زیر را برای توابع هیپربولیک بررسی کنید.

۱) $cosh(-x) = cosh(x)$ ۲) $tanh\, x = \frac{1}{coth\, x}$

۳) $cosh^2 x - sinh^2 x = 1$ ۴) $sinh\, 2x = 2\, sinh\, x\, cosh\, x$

۵) $sinh(x+y) = sinh\, x\, cosh\, y + cosh\, x\, sinh\, y$

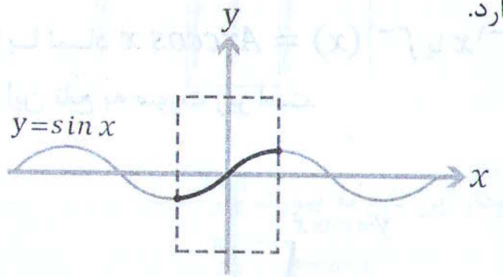
۶) $cosh(x-y) = cosh\, x\, cosh\, y - sinh\, x\, sinh\, y$

۲۰- توابع معکوس مثلثاتی:

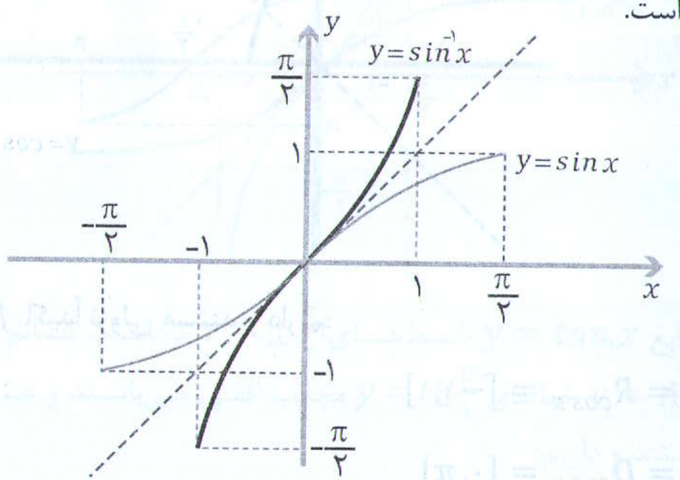
توابع مثلثاتی یک‌به‌یک نمی‌باشند و لذا معکوس ندارند؛ ولی اگر دامنه این توابع را محدود کنیم می‌توان برای این توابع، تابع معکوس تعریف کرد. لازم به یاد آوری است که دو نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ قرینه‌اند و داریم:

$$D_{f^{-1}} = R_f\ ,\ R_{f^{-1}} = D_f$$

الف) تابع $y = Arcsin\, x$: تابع $f(x) = sin\, x$ در فاصله $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ یک‌به‌یک است، لذا معکوس دارد.



معکوس این تابع را با نماد $f^{-1}(x) = Arcsin\, x$ یا $f^{-1}(x) = sin^{-1}x$ نمایش می‌دهیم. این نماد را نباید با عبارت $(sin\, x)^{-1} = \frac{1}{sin\, x}$ اشتباه کرد. نمودار این تابع به صورت زیر است.



دو تابع f و f^{-1} اکیداً صعودی هستند و داریم:

$$D_{sin^{-1}x} = R_{sin\, x} = [-1, 1]\ \ ,\ \ R_{sin^{-1}x} = D_{sin\, x} = [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

در اولین جدول مشاهده می‌کنیم هنگامی که مقادیر x از سمت مقادیر بیشتر از یک (سمت راست) به عدد یک نزدیک می‌شوند مقادیر $f(x)$ به عدد ۲ نزدیک می‌گردند. در این حالت می‌گوییم «حد راست تابع $f(x)$ در نقطه $x = ۱$ برابر ۲ است» و این مطلب را با نماد $\underset{x\to ۱^+}{Lim} f(x) = ۲$ نشان می‌دهیم[1].

در جدول دوم مشاهده می‌کنیم هنگامی که مقادیر x از سمت مقادیر کمتر از یک (سمت چپ) به عدد یک نزدیک می‌شوند مقادیر $f(x)$ به عدد ۲ نزدیک می‌گردند. در این حالت می‌گوییم «حد چپ تابع $f(x)$ در $x = ۱$ برابر ۲ است» و این مطلب را با نماد $\underset{x\to ۱^-}{Lim} f(x) = ۲$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲: برای محاسبه حد چپ و راست تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در نقطه $x = ۰$ جدول‌های زیر را تشکیل داده‌ایم:

x	۴	۱	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۹}$	۰/۰۱	۰/۰۰۰۱	$۱۰^{-۶}$	...	۰
$f(x)$	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	...	

x	۴-	۱-	$-\frac{۱}{۴}$	$-\frac{۱}{۹}$	۰/۰۱-	۰/۰۰۰۱-	$-۱۰^{-۶}$	...	۰
$f(x)$	به ازای کلیه مقادیر کمتر از صفر تابع تعریف نشده است								

در جدول اول مشاهده می‌کنیم هنگامی که مقادیر x از سمت مقادیر بیشتر از صفر (سمت راست) به عدد صفر نزدیک می‌شوند، مقادیر $f(x)$ به عدد صفر نزدیک می‌گردند. لذا حد راست تابع $f(x)$ در نقطه $x = ۰$ برابر صفر است و می‌نویسیم:

$$\underset{x\to ۰^+}{Lim} \sqrt{x} = ۰$$

در جدول دوم مشاهده می‌کنیم هنگامی که مقادیر x از سمت مقادیر کمتر از صفر (سمت چپ) به عدد صفر نزدیک می‌شوند، تابع تعریف نمی‌شود. لذا در این حالت می‌گوییم تابع $f(x)$ در نقطه $x = ۰$ حد چپ ندارد و می‌نویسیم:

$\underset{x\to ۰^-}{Lim} \sqrt{x}$ موجود نیست

۱- عبارت Lim سه حرف اول واژه $Limit$ به معنی حد می‌باشد.

مثال ۳: برای محاسبه حد چپ و راست تابع $f(x) = [x]$ در نقطه $x = ۲$ جدول‌های زیر را تشکیل داده‌ایم:

x	۴	۳	۲/۵	۲/۱	۲/۰۱	۲/۰۰۱	...	۲
$f(x)$	۴	۳	۲	۲	۲	۲		

x	۰	۱	۱/۵	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	...	۲
$f(x)$	۰	۱	۱	۱	۱	۱		

با توجه به محاسبات فوق داریم:

حد راست تابع $f(x)$ در نقطه $x = ۲$ برابر ۲ است و می‌نویسیم: $\underset{x\to ۲^+}{Lim}[x] = ۲$

حد چپ تابع $f(x)$ در نقطه $x = ۲$ برابر یک است و می‌نویسیم: $\underset{x\to ۲^-}{Lim}[x] = ۱$

نکته:

۱) در بحث حد چپ یا راست تابع در نقطه $x = a$، به نقطه $x = a$ نزدیک می‌شویم ولی به این مطلب که تابع در این نقطه تعریف شده یا نشده کاری نداریم.

۲) برای اینکه حد چپ و راست تابع در نقطه‌ای را مشخص کنیم هرچه به آن نقطه نزدیک‌تر شویم حدس ما دقیق‌تر خواهد بود.

۳) در لفظ نزدیک شدن یا میل کردن در محاسبه حد، حرکت و تغییر نهفته است. این مطلب برای مقادیر x صادق است ولی هنگامی که لفظ نزدیک شدن یا میل کردن را برای مقادیر y به کار می‌بریم، ممکن است حرکت و تغییری در کار نباشد (مانند مثال ۳).

تعریف ۱: هرگاه حد چپ و حد راست تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ موجود و هر دو برابر L باشند، می‌گوییم حد تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ برابر L است و می‌نویسیم: $\underset{x\to a}{Lim} f(x) = L$ ؛ در غیر این حالت می‌گوییم حد موجود نیست.

مثال ۴: با توجه به مثال‌های ۱، ۲ و ۳ و تعریف ۱ داریم:

$$\left(\underset{x\to ۱^+}{Lim}\frac{x^۲-۱}{x-۱} = ۲ \quad و \quad \underset{x\to ۱^-}{Lim}\frac{x^۲-۱}{x-۱} = ۲\right) \to \underset{x\to ۱}{Lim}\frac{x^۲-۱}{x-۱} = ۲$$

$(\lim\limits_{x\to ۰^+}\sqrt{x} = ۰$ و $\lim\limits_{x\to ۰^-}\sqrt{x}$ موجود نیست$) \to \lim\limits_{x\to ۰}\sqrt{x}$ موجود نیست

$(\lim\limits_{x\to ۲^+}[x] = ۲$ و $\lim\limits_{x\to ۲^-}[x] = ۱) \to \lim\limits_{x\to ۲}[x]$ موجود نیست

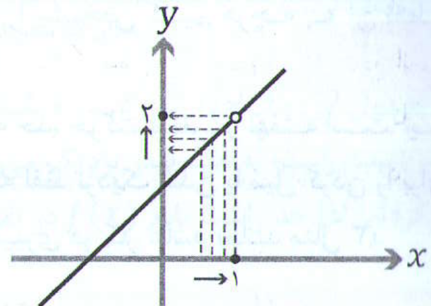
نکته: از روی نمودار تابع نیز می‌توان حد چپ و راست تابع را در نقطه $x = a$ مشخص کرد. برای این منظور به ازای هر نقطه نزدیک $x = a$، بر روی محورxها به کمک نمودارتابع $f(x)$ نقطه‌ای را بر روی محورyها نظیر می‌کنیم. با حرکت نقاط روی محورxها به سمت $x = a$، حرکت نقاط نظیر را بر روی محورyها زیر نظر گرفته و حد تابع را مشخص می‌کنیم. حدهای مثال‌های قبل را یک بار دیگر به کمک نمودار توابع آن‌ها مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مثال ۵: برای محاسبه حد تابع $f(x) = \frac{x^۲-۱}{x-۱}$ در نقطه $x = ۱$، ابتدا نمودار تابع را رسم کرده و سپس به کمک آن، مقدار حدها را می‌یابیم.

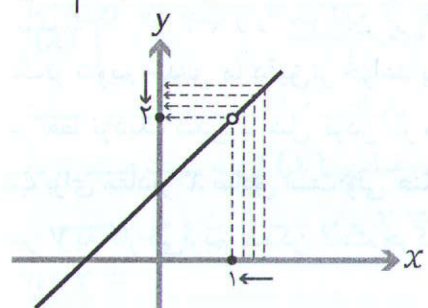
$$D_f = \mathbb{R} - \{۱\} \xrightarrow{x\neq ۱} f(x) = \frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱} = x + ۱ \text{ (خط راست)}$$

x	۱	۲
y	۲	۳

نمودار خط راست را به کمک دو نقطه آن می‌توان رسم کرد.



$\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = ۲$

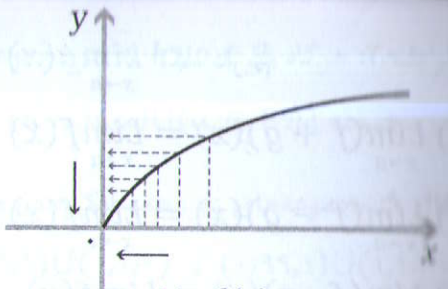


$\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = ۲$

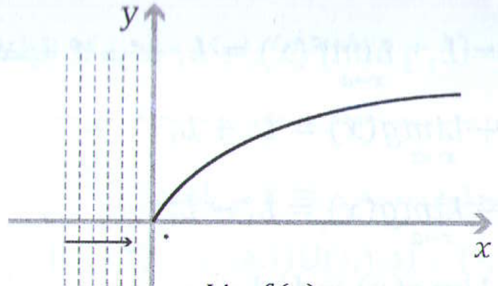
مثال ۶: برای محاسبه حد چپ و راست تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در نقطه $x = ۰$، ابتدا نمودار تابع را رسم کرده و سپس حدها را مشخص می‌کنیم.

$D_f = [۰, +\infty)$

x	۰	۱	۴	۹	۱۶	...
y	۰	۱	۲	۳	۴	...

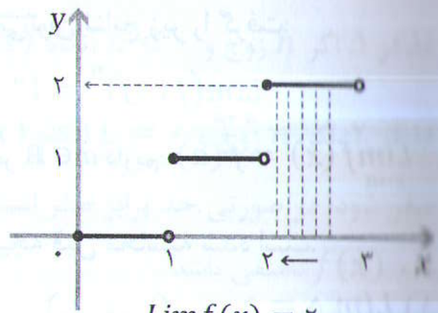


$\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = ۰$

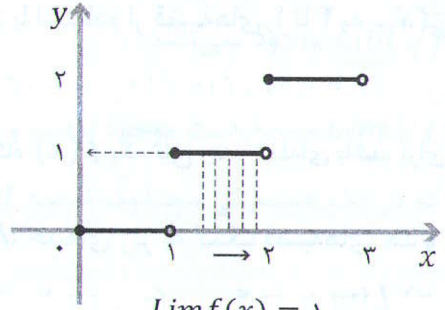


$\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)$ موجود نیست

مثال ۷: برای محاسبه حد چپ و راست تابع $f(x) = [x]$ در نقطه $x = ۲$، ابتدا نمودار تابع را رسم کرده و سپس به کمک آن، مقدار حدها را می‌یابیم.



$\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = ۲$



$\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = ۱$

تذکر: در بسیاری از مباحث ریاضی لازم است که حد یک تابع، در یک نقطه محاسبه شود. اگر خواسته باشیم این کار را به وسیله‌ی تشکیل جدول و یا رسم نمودار تابع انجام دهیم، گاه بسیار مشکل و طولانی خواهد بود. لذا ریاضی‌دانان تعدادی قضیه را ثابت کرده‌اند که به کمک آنها محاسبه حد تابع، ساده‌تر انجام می‌شود. در این کتاب تعدادی از این قضیه‌ها را بدون اثبات بیان کرده و مورد استفاده قرار می‌دهیم.

قضیه ۱: هرگاه a و c دو عدد حقیقی باشند برای تابع ثابت $f(x) = c$ داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} c = c$$

قضیه ۲: هرگاه $f(x) = x$ و $a \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x = a$$

قضیه ۳: هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ و k یک عدد حقیقی باشد، داریم:

$$\lim_{x\to a} kf(x) = k\lim_{x\to a} f(x) = kL$$

قضیه ۴: هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$ آنگاه داریم:

$$1)\ \lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L_1 + L_2$$

$$2)\ \lim_{x\to a}(f-g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = L_1 - L_2$$

$$3)\ \lim_{x\to a}(f\cdot g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x) = L_1 L_2$$

$$4)\ \lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \qquad (L_2 \neq 0)$$

نتیجه: با استفاده از قضیه‌های ۱ تا ۴ به سادگی می‌توان نتایج زیر را گرفت:

الف) هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ و $n \in \mathbb{N}$ آنگاه داریم: $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\big)^n = L^n$

ب) هرگاه $f(x)$ یک تابع چندجمله‌ای باشد، برای هر $a \in \mathbb{R}$ داریم: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

مثال ۸: حدهای زیر به کمک قضیه‌های حد و نتیجه قبل محاسبه شده است.

$1)\ \lim\limits_{x\to 3} 5 = 5$ (بنابر قضیه ۱) $2)\ \lim\limits_{x\to 4} x = 4$ (بنابر قضیه ۲)

$3)\ \lim\limits_{x\to 2}(2x^2 - 3x + 1) = 2(2)^2 - 3(2) + 1 = 3$ (بنابر نتیجه)

$4)\ \lim\limits_{x\to 2^-} 5[x] = 5\lim\limits_{x\to 2^-}[x] = 5 \times 1 = 5$ (بنابر قضیه ۳ و مثال ۳)

$5)\ \lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2 - 1 + \frac{x^2-1}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1}(2x^2 - 1) + \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 1 + 2 = 3$

(بنابر نتیجه و مثال ۱ و قضیه ۴)

$6)\ \lim\limits_{x\to 0^+}(\sqrt{x} - x^2) = \lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x} - \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0 - 0 = 0$

(بنابر نتیجه و مثال ۲ و قضیه ۴)

$7)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-1}{5x^2+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}(2x-1)}{\lim\limits_{x\to 0}(5x^2+1)} = \frac{-1}{1} = -1$ (بنابر نتیجه و قضیه ۴)

$8)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x-1}{5x^2+1}\right)^7 = \left(\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x-1}{5x^2+1}\right)\right)^7 = (-1)^7 = -1$ (بنابر نتیجه و قضیه ۴)

$9)\ \lim\limits_{x\to 4}\frac{2x-3}{x-4} = \frac{\lim\limits_{x\to 4}(2x-3)}{\lim\limits_{x\to 4}(x-4)} = \frac{5}{0}$ (بنابر قضیه ۴، حد در $\mathbb{R}$ موجود نیست)

تعریف ۲: هرگاه $a \in \mathbb{R}$ و $h > 0$، مجموعه $(a-h, a+h)$ را یک همسایگی نقطه a و مجموعه $(a-h, a)\cup(a, a+h)$ را یک همسایگی محذوف نقطه a می‌نامند.

مثال ۹: مجموعه‌های زیر، همسایگی‌های محذوف نقطه $x = 1$ می‌باشند.

$(0,1)\cup(1,2)$ ، $(0/5,1)\cup(1,1/5)$ ، $(0/9,1)\cup(1,1/1)$ ، $(0/99,1)\cup(1,1/01)$

قضیه ۵: هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ و n یک عدد طبیعی غیر یک باشد، اگر n فرد یا n زوج و $L > 0$ باشد، داریم: $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$

تذکر ۱: اگر n زوج و $L < 0$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}$ موجود نمی‌باشد.

تذکر ۲: اگر n زوج و $L = 0$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}$ ممکن است موجود نباشد و یا برابر صفر شود. در صورتی حد برابر صفر است که در یک همسایگی محذوف نقطه $x = a$ تابع $f(x)$ نامنفی باشد.

مثال ۱۰: حدهای زیر به کمک قضیه‌های حد محاسبه شده است.

$$1)\ \lim_{x\to -3}\sqrt[3]{x^2 - 8} = \sqrt[3]{\lim_{x\to -3}(x^2 - 8)} = \sqrt[3]{1} = 1$$

$$2)\ \lim_{x\to 2}\sqrt[5]{2x^2 - 9} = \sqrt[5]{\lim_{x\to 2}(2x^2 - 9)} = \sqrt[5]{-1} = -1$$

$$3)\ \lim_{x\to 4}\sqrt{2x + 1} = \sqrt{\lim_{x\to 4}(2x + 1)} = \sqrt{9} = 3$$

$4)\ \lim\limits_{x\to 0}\sqrt[4]{x^2 + 3x - 1} = \sqrt[4]{\lim\limits_{x\to 0}(x^2 + 3x - 1)} = \sqrt[4]{-1}$ حد موجود نیست

$$5)\ \lim_{x\to 2}\sqrt[3]{2x - 4} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 2}(2x - 4)} = \sqrt[3]{0} = 0$$

$$6)\ \lim_{x\to -2}\sqrt[4]{x + 2} = \sqrt[4]{\lim_{x\to -2}(x + 2)} = \sqrt[4]{0} = ?$$

بنا بر تذکر ۲ حد موجود نیست؛ زیرا در هر همسایگی محذوف $x = -۲$ تابع $f(x) = x + ۲$ مثبت نمی‌باشد. به بیان دیگر، تابع زیر رادیکال یعنی f برای $x < -۲$ منفی می‌شود.

$$۷)\ \lim_{x\to ۱}\sqrt{x^۲ - ۲x + ۱} = \sqrt{\lim_{x\to ۱}(x^۲ - ۲x + ۱)} = \sqrt{۰} = ?$$

در هر همسایگی محذوف $x = ۱$ تابع زیر رادیکال نامنفی است، زیرا:

$$f(x) = x^۲ - ۲x + ۱ = (x - ۱)^۲ \geq ۰$$

پس حد موجود و برابر صفر است.

نکته: هرگاه حد تابع در یک نقطه به صورت $\frac{۰}{۰}$ درآید آن را مبهم نامیده و می‌توان به کمک روش‌هایی، این ابهام را برطرف کرد[1]. پس از رفع ابهام مشخص می‌شود که حد موجود است و یا حد موجود نیست. ضمن بیان چند مثال با بعضی از روش‌های رفع ابهام آشنا می‌شوید.

مثال ۱۱: برای محاسبه $\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱}{x-۱}$ اگر حد صورت و حد مخرج را به کمک قضیه‌ها محاسبه کنیم، حد به صورت $\frac{۰}{۰}$ در می‌آید. در مثال ۱ به کمک جدول و در مثال ۵ به کمک نمودار مشاهده کردید که حد این تابع برابر ۲ است. بنابراین روش‌هایی وجود دارد که بتوان این ابهام را برطرف کرد. چون درحد، هنگامی که x به سمت یک میل می‌کند مقادیر x به یک بسیار نزدیک می‌شوند ولی مقدار $x = ۱$ را اختیار نمی‌کنند، بنابراین عبارت $x - ۱$ غیر صفر است و در نزدیکی $x = ۱$ دو تابع $f(x) = \frac{x^۲-۱}{x-۱}$ و $g(x) = x + ۱$ مساوی هستند. لذا به صورت زیر می‌توان این حد را محاسبه کرد:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱}{x-۱} = \lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱}(x + ۱) = ۲$$

۱- در فصل سوم به کمک حد با مفهوم جدیدی به نام مشتق آشنا می‌شوید. در محاسبات این مفهوم جدید، به حدهای مبهم $\frac{۰}{۰}$ بر می‌خوریم که باید رفع ابهام شوند.

مثال ۱۲: مقدار $\lim_{x\to ۱}\frac{x^۳+x-۲}{x^۲-۱}$ را به‌دست آورید.

حل: با محاسبه جداگانه حد صورت و حد مخرج، جواب حد به صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ درمی‌آید. هرگاه صورت و مخرج تابع $f(x) = \frac{x^۳+x-۲}{x^۲-۱}$ را به ترتیب $g(x)$ و $h(x)$ بنامیم، چون $g(۱) = ۰$ و $h(۱) = ۰$ پس $x - ۱$ عاملی برای $g(x)$ و $h(x)$ می‌باشد[1]. عوامل دیگر را به کمک عمل تقسیم یا تجزیه می‌توان به‌دست آورد. عبارت $x - ۱$ را عامل صفر کننده صورت و مخرج می‌نامند و چون در هنگام حدگیری، این عبارت غیر صفر می‌باشد، می‌توان آن را مانند مثال قبل از صورت و مخرج کسر حذف کرد و نوشت:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۳+x-۲}{x^۲-۱} = \lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x^۲+x+۲)}{(x-۱)(x+۱)} = \lim_{x\to ۱}\frac{x^۲+x+۲}{x+۱} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

مثال ۱۳: مقدار $\lim_{x\to -۲}\frac{x^۲-۴}{x^۳+۸}$ را به‌دست آورید.

حل: با محاسبه جداگانه حد صورت و حد مخرج، جواب حد به صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ در می‌آید. بنابراین $x + ۲$ عامل صفر کننده صورت و مخرج است. پس داریم:

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x^۲-۴}{x^۳+۸} = \lim_{x\to -۲}\frac{(x+۲)(x-۲)}{(x+۲)(x^۲-۲x+۴)} = \lim_{x\to -۲}\frac{x-۲}{x^۲-۲x+۴} = \frac{-۴}{۱۲} = -\frac{۱}{۳}$$

مثال ۱۴: مقدار $\lim_{x\to ۴}\frac{\sqrt{x}-۲}{x-۴}$ پس از محاسبه جداگانه حد صورت و حد مخرج، به صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ در می‌آید. برای حذف عامل صفر کننده یعنی $x - ۴$، صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم؛ خواهیم داشت:

۱- دلیل این مطلب را در ذیل بحث «باقیمانده تقسیم بدون عمل تقسیم» در کتاب ریاضیات مقدماتی بخش ۲-۱ می‌توانید مشاهده کنید.

$$Lim_{x\to ۴}\frac{\sqrt{x}-۲}{x-۴}=Lim_{x\to ۴}\frac{\sqrt{x}-۲}{x-۴}\times\frac{\sqrt{x}+۲}{\sqrt{x}+۲}=Lim_{x\to ۴}\frac{x-۴}{(x-۴)(\sqrt{x}+۲)}=Lim_{x\to ۴}\frac{۱}{\sqrt{x}+۲}=\frac{۱}{۴}$$

مثال ۱۵: مقدار $Lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱}{\sqrt[۳]{x}-۱}$ پس از محاسبه جداگانه حد صورت و حد مخرج، به صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ در می‌آید. برای حذف عامل صفر کننده یعنی $۱-x$، هم زمان با تجزیه صورت، مخرج کسر را نیز گویا می‌کنیم؛ خواهیم داشت:

$$Lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱}{\sqrt[۳]{x}-۱}=Lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x+۱)}{\sqrt[۳]{x}-۱}\times\frac{(\sqrt[۳]{x})^۲+\sqrt[۳]{x}+۱}{(\sqrt[۳]{x})^۲+\sqrt[۳]{x}+۱}=Lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x+۱)(\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱)}{(x-۱)}$$

$$=Lim_{x\to ۱}(x+۱)\left(\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱\right)=۲\times ۳=۶$$

قضیه ۶: برای هر عدد حقیقی a همواره داریم:

$$Lim_{x\to a}\sin x=\sin a\quad ,\quad Lim_{x\to a}\cos x=\cos a$$

مثال ۱۶: به کمک قضیه‌های حد، حدهای زیر محاسبه شده است.

$$۱)\ Lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}(۲\cos x-۳\sin x)=۲Lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\cos x-۳Lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\sin x$$

$$=۲\cos\frac{\pi}{۶}-۳\sin\frac{\pi}{۶}=۲\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)-۳\left(\frac{۱}{۲}\right)=\sqrt{۳}-\frac{۳}{۲}$$

$$۲)\ Lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\tan x=Lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{Lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\sin x}{Lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\cos x}=\frac{\sin\frac{\pi}{۴}}{\cos\frac{\pi}{۴}}=\tan\frac{\pi}{۴}=۱$$

مشابه مورد فوق، وجود حدهای زیر را می‌توان مشخص کرد.

$۳)\ Lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\tan x=\tan\frac{\pi}{۲}$ موجود نیست $\qquad ۴)\ Lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\cot x=\cot\frac{\pi}{۲}=۰$

تذکر: قضیه زیر، روشی دیگر برای رفع ابهام حالت $\frac{۰}{۰}$ بعضی از حدها را بیان می‌کند.

قضیه ۷: هرگاه x برحسب رادیان باشد[1]، داریم: $Lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱$

۱- علت اینکه x باید برحسب رادیان باشد این است که در تابع $y=\frac{\sin x}{x}$ صورت کسر، عددی حقیقی برحسب واحد طول است، لذا مخرج یعنی x هم باید عدد حقیقی برحسب واحد طول باشد؛ و رادیان واحدی برای اندازه‌گیری زاویه برحسب طول است. برای آشنایی با واحد رادیان، بخش یکم از فصل پنجم کتاب ریاضیات مقدماتی را مطالعه کنید.

مثال ۱۷: حدهای زیر در برخورد اول، به صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ در می‌آیند ولی به کمک قضیه ۷ رفع ابهام شده‌اند. روش رفع ابهام را برای مورد اول توضیح داده‌ایم، بقیه موارد به‌طور مشابه انجام می‌شود.

$$۱)\ Lim_{t\to ۲}\frac{\sin(t-۲)}{(t-۲)}=\frac{\sin ۰}{۰}=\frac{۰}{۰}\ (\text{مبهم})$$

با فرض $x=t-۲$، هرگاه t به سمت ۲ میل کند، x به سمت صفر میل می‌کند و بنابر قضیه ۷ می‌توان نوشت:

$$Lim_{t\to ۲}\frac{\sin(t-۲)}{t-۲}=Lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱$$

$$۲)\ Lim_{t\to ۲}\frac{\sin(t-۲)}{t^۲-۴}=\frac{\sin ۰}{۰}=\frac{۰}{۰}\ (\text{مبهم})$$

$$Lim_{t\to ۲}\frac{\sin(t-۲)}{t^۲-۴}=Lim_{t\to ۲}\frac{\sin(t-۲)}{t-۲}\times\frac{۱}{t+۲}=Lim_{t\to ۲}\frac{\sin(t-۲)}{t-۲}\times Lim_{t\to ۲}\frac{۱}{t+۲}$$

$$=Lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}\times Lim_{t\to ۲}\frac{۱}{t+۲}=۱\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۴}\qquad (x=t-۲)$$

$$۳)\ Lim_{t\to ۰}\frac{\sin ۵t}{۳t}=\frac{\sin ۰}{۰}=\frac{۰}{۰}\ (\text{مبهم})$$

$$Lim_{t\to ۰}\frac{\sin ۵t}{۳t}=Lim_{t\to ۰}\frac{۵}{۳}\,\frac{\sin ۵t}{۵t}=\frac{۵}{۳}Lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=\frac{۵}{۳}\times ۱=\frac{۵}{۳}\qquad (x=۵t)$$

$$۴)\ Lim_{x\to -\frac{\pi}{۲}}\frac{\cos x}{x+\frac{\pi}{۲}}=\frac{\cos(-\frac{\pi}{۲})}{۰}=\frac{۰}{۰}\ (\text{مبهم})$$

$$Lim_{x\to -\frac{\pi}{۲}}\frac{\cos x}{x+\frac{\pi}{۲}}=Lim_{x\to -\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin(\frac{\pi}{۲}+x)}{(\frac{\pi}{۲}+x)}=Lim_{z\to ۰}\frac{\sin z}{z}=۱\qquad (z=\frac{\pi}{۲}+x)$$

$$۵)\ Lim_{x\to ۰}\frac{\sin x\sin(x^۲)\sin(x^۳)}{۵x^۶}=\frac{۰}{۰}\ (\text{مبهم})$$

$$=\frac{۱}{۵}Lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}\times Lim_{x\to ۰}\frac{\sin(x^۲)}{x^۲}\times Lim_{x\to ۰}\frac{\sin(x^۳)}{x^۳}=\frac{۱}{۵}\times ۱\times ۱\times ۱=\frac{۱}{۵}$$

نتیجه: از قضیه ۷ نتایج زیادی حاصل می‌شود که بعضی از آن‌ها به صورت زیر می‌باشد. از این نتایج برای حل سریع حدها می‌توان استفاده کرد.

۱) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{x}{\sin x} = ۱$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\tan x}{x} = ۱$

۳) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{x}{\tan x} = ۱$ ۴) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\sin(mx)}{nx} = \frac{m}{n}$

۵) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{nx}{\sin(mx)} = \frac{n}{m}$ ۶) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\tan(mx)}{\sin(nx)} = \frac{m}{n}$

۷) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\sin(nx)}{\sin(mx)} = \frac{n}{m}$ ۸) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\tan(mx)}{\tan(nx)} = \frac{m}{n}$

مثال ۱۸: مقدار $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\sin bx-\sin ax}{bx-ax}$ را با فرض $(b \neq a)$، به‌دست آورید.

حل: در برخورد اول پاسخ حد به صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ در می‌آید که به کمک نتیجه قبل می‌توان ابهام را برطرف و مقدار حد را به‌دست آورد.

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\sin bx}{bx-ax} - \frac{\sin ax}{bx-ax} = \lim_{x\to ۰} \frac{\sin bx}{(b-a)x} - \lim_{x\to ۰} \frac{\sin ax}{(b-a)x}$$

$$= \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} = \frac{b-a}{b-a} = ۱$$

تذکر: برای رفع ابهام از حالت $\frac{۰}{۰}$ روش ساده و جالب دیگری به نام **قاعده هوپیتال** وجود دارد که در فصل چهارم (فصل کاربرد مشتق) با آن آشنا می‌شوید.

قضیه ۸ (قضیه فشردگی)[1]: هرگاه توابع f ، g و h به گونه‌ای باشند که در یک همسایگی محذوف a داشته باشیم: $g(x) \le f(x) \le h(x)$ ، همچنین:

$\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$ ، در این صورت داریم: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

۱- به کمک قضیه ۸ ، قضیه ۷ ثابت می‌شود؛ چون در این کتاب اثبات قضیه‌ها مورد نظر نمی‌باشد، از نظر آموزشی ترجیح داده‌ایم ترتیب قضیه‌ها را چنین بیان کنیم.

مثال ۱۹: مقدار $\lim\limits_{x\to ۰} \left(x^۲ \sin\frac{۱}{x}\right)$ را محاسبه کنید.

حل: تابع $y = \sin\frac{۱}{x}$ در $x = ۰$ تعریف نشده است و در مبحثی به نام دنباله‌ها ثابت می‌شود این تابع در این نقطه حد ندارد، بنابراین نمی‌توان از قضیه حد حاصل ضرب استفاده کرد. برای محاسبه این حد به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} x \neq ۰ \to -۱ \le \sin\frac{۱}{x} \le ۱ \\ x \neq ۰ \to x^۲ > ۰ \end{array}\right\} \to -x^۲ \le x^۲ \sin\frac{۱}{x} \le x^۲$$

با فرض $g(x) = -x^۲$ ، $f(x) = x^۲ \sin\frac{۱}{x}$ و $h(x) = x^۲$ در هر همسایگی محذوف $x = ۰$ داریم: $g(x) \le f(x) \le h(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۰} h(x) = \lim\limits_{x\to ۰} g(x) = ۰$

بنابراین شرایط قضیه فشردگی فراهم است و می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to ۰} f(x) = \lim_{x\to ۰} \left(x^۲ \sin\frac{۱}{x}\right) = ۰$$

مثال ۲۰: هرگاه تابع f به گونه‌ای باشد که برای هر x داشته باشیم: $|f(x) + ۵| \le (x - ۱)^۲$ ، مقدار $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ را محاسبه کنید.

حل: با استفاده از خواص قدر مطلق داریم:

$$|f(x) + ۵| \le (x - ۱)^۲ \to -(x - ۱)^۲ \le f(x) + ۵ \le (x - ۱)^۲$$
$$\to -(x - ۱)^۲ - ۵ \le f(x) \le (x - ۱)^۲ - ۵$$

با فرض $g(x) = -(x - ۱)^۲ - ۵$ و $h(x) = (x - ۱)^۲ - ۵$ داریم:

$$g(x) \le f(x) \le h(x) \quad ، \quad \lim_{x\to ۱} g(x) = \lim_{x\to ۱} h(x) = -۵$$

بنابراین شرایط قضیه فشردگی فراهم است و داریم: $\lim\limits_{x\to ۱} f(x) = -۵$

نکته: در فصل یکم (فصل تابع) مشاهده کردید که تابع جزء صحیح، تابع قدر مطلق و تابع علامت، توابع چند ضابطه‌ای می‌باشند. اگر این نوع توابع در حد ظاهر شوند، در اکثر مواقع به روش ذیل می‌توان حد تابع را محاسبه کرد.

« ابتدا در نزدیکی نقطه‌ای که می‌خواهید حد بگیرید، تابعی مساوی تابع قبلی قرار دهید که در آن جزء صحیح یا قدر مطلق و یا تابع علامت نباشد، سپس حد بگیرید.»

در مواردی هم این روش جواب نمی‌دهد که آنگاه باید به دنبال روش ابتکاری بود. یک مورد را به عنوان نمونه، در مثال ۲۶ آورده‌ایم.

مثال ۲۱: مقدار $\underset{x\to 2^-}{Lim}\frac{[x]+2}{3-x}$ را محاسبه کنید.

حل: چون مقادیر x از سمت چپ به عدد ۲ نزدیک می‌شوند، می‌توان فرض کرد که $1 < x < 2$ ، در این فاصله داریم: $[x] = 1$ ، پس می‌توان نوشت:

$$\underset{x\to 2^-}{Lim}\frac{[x]+2}{3-x} = \underset{x\to 2^-}{Lim}\frac{1+2}{3-x} = \underset{x\to 2^-}{Lim}\frac{3}{3-x} = \frac{3}{3-2} = 3$$

مثال ۲۲: مقدار $\underset{x\to 4^-}{Lim}\frac{x-1}{[x]-3}$ را به‌دست آورید.

حل: چون مقادیر x از سمت چپ به عدد ۴ نزدیک می‌شوند می‌توان فرض کرد که $3 < x < 4$ و در این فاصله داریم: $[x] = 3$ ، بنابراین $f(x)$ به صورت $f(x) = \frac{x-1}{0}$ در می‌آید و ما چنین تابعی نداریم، بنابراین: $\underset{x\to 4^-}{Lim}\frac{x-1}{[x]-3} = \underset{x\to 4^-}{Lim}\frac{x-1}{0}$ حد موجود نیست

موجود نبودن حد فوق را به صورت دیگری نیز می‌توان بیان کرد. دامنه تابع $f(x) = \frac{x-1}{[x]-3}$ مجموعه $D_f = (-\infty, 3)\cup[4, +\infty)$ می‌باشد. بنابراین با توجه به دامنه، از سمت چپ نمی‌توان به نقطه $x = 4$ نزدیک شد. لذا حد موجود نمی‌باشد.

مثال ۲۳: مقدار $\underset{x\to 2^-}{Lim}\frac{|x-2|}{x^2-4}$ را محاسبه کنید.

حل: وقتی از سمت چپ به نقطه $x = 2$ نزدیک می‌شویم، داریم: $x < 2$ و لذا $x - 2 < 0$ و در نتیجه $|x - 2| = -(x - 2)$ ، پس می‌توان نوشت:

$$\underset{x\to 2^-}{Lim}\frac{|x-2|}{x^2-4} = \underset{x\to 2^-}{Lim}\frac{-(x-2)}{x^2-4} = \frac{0}{0} \to \underset{x\to 2^-}{Lim}\frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \underset{x\to 2^-}{Lim}\frac{-1}{x+2} = \frac{-1}{4}$$

مثال ۲۴: مقدار $\underset{x\to 0^+}{Lim}\frac{2x-|x|}{[x+1]-x}$ را محاسبه کنید.

حل: چون از سمت راست به $x = 0$ نزدیک می‌شویم پس $x > 0$ و لذا داریم: $|x| = x$

با فرض $0 < x < 1$ داریم: $1 < x + 1 < 2 \to [x + 1] = 1$

بنابراین در نزدیکی $x = 0$ حد را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\underset{x\to 0^+}{Lim}\frac{2x-|x|}{[x+1]-x} = \underset{x\to 0^+}{Lim}\frac{2x-x}{1-x} = \underset{x\to 0^+}{Lim}\frac{x}{1-x} = \frac{0}{1} = 0$$

مثال ۲۵: مقدار $\underset{x\to 2^+}{Lim}\frac{x\,sgn(x^2-4)}{x^2-5x+1}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$2 < x \to 4 < x^2 \to 0 < x^2 - 4 \to sgn(x^2 - 4) = 1$$

$$\underset{x\to 2^+}{Lim}\frac{x\,sgn(x^2-4)}{x^2-5x+1} = \underset{x\to 2^+}{Lim}\frac{x}{x^2-5x+1} = \frac{2}{4-10+1} = -\frac{2}{5}$$

مثال ۲۶: مقدار $\underset{x\to 0}{Lim}\left(x^2\left[\frac{1}{x}\right]\right)$ را به‌دست آورید.

حل: دراین مثال نمی‌توان $\left[\frac{1}{x}\right]$ را برداشت وعدد مشخصی را به جای آن گذاشت، زیرا:

$$x = 0/01 \to \left[\frac{1}{x}\right] = 100\ ,\ x = 0/001 \to \left[\frac{1}{x}\right] = 1000\ ,\ x = 0/0001 \to \left[\frac{1}{x}\right] = 10000$$

برای محاسبه این حد از یکی از خاصیت‌های جزء صحیح و قضیه فشردگی استفاده می‌کنیم.

$$(\forall a \in \mathbb{R} \to a - 1 < [a] \le a) \ \to\ (x \ne 0 \to \frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x}\right] \le \frac{1}{x})$$

با ضرب طرفین رابطه اخیر در عبارت مثبت x^2 داریم:

$$x^2(\frac{1}{x} - 1) < x^2\left[\frac{1}{x}\right] \le x^2(\frac{1}{x}) \to x - x^2 < x^2\left[\frac{1}{x}\right] \le x$$

با فرض $g(x) = x - x^2$ ، $h(x) = x$ و $f(x) = x^2\left[\frac{1}{x}\right]$ داریم:

$$g(x) \le f(x) \le h(x)\ ,\ \underset{x\to 0}{Lim}g(x) = \underset{x\to 0}{Lim}h(x) = 0$$

بنابراین شرایط قضیه فشردگی فراهم است و لذا: $\underset{x\to 0}{Lim}f(x) = \underset{x\to 0}{Lim}\,x^2\left[\frac{1}{x}\right] = 0$

تمرین

۱- با تشکیل جدول، حد چپ و حد راست توابع زیر را در نقطه داده شده به‌دست آورید.

۱) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}\ ,\ x=3$ ۲) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}\ ,\ x=1$

۳) $f(x)=x\,sgn(x-1)\ ,\ x=1$ ۴) $f(x)=x[x]\ ,\ x=0$

۵) $f(x)=[x]+[-x]\ ,\ x=-1$ ۶) $f(x)=\sqrt{2-x}\ ,\ x=2$

۲- نمودار توابع زیر را رسم کرده و به کمک آن حد چپ و حد راست تابع را در نقطه داده شده به‌دست آورید.

۱) $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & x\ge 0\\ x+1 & x<0\end{cases}\ ,\ x=0$ ۲) $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x\ge -1\\ 1-x & x<-1\end{cases}\ ,\ x=-1$

۳) $f(x)=(x-1)[x]\ ,\ x=0$ ۴) $f(x)=x^2\,sgn\,x\ ,\ x=0$

۵) $f(x)=\dfrac{x+1}{|x+1|}\ ,\ x=-1$ ۶) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}\ ,\ x=2$

۳- به کمک قضایای حد، حدود زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+1)$ ۲) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-1}{x^3+2x-1}$

۳) $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x^2-3x}$ ۴) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[4]{x^2-3x}$

۵) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{(x-2)^3}$ ۶) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt[3]{(x-4)^5}$

۷) $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}}(3\cos x+2\sin x)$ ۸) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}$

۹) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[5]{3x-2}\,(x^2+5x)$ ۱۰) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 x}$

۴- حدهای زیر را پس از رفع ابهام محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{x^2-5x+4}$ ۲) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$

۳) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^3+x^2+x+3}{x^2-1}$ ۴) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-x^2-x+10}{x^2+3x+2}$

۵) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-2x+1}{2x^2-3x+1}$ ۶) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{4-x}$

۷) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ ۸) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x+5}{\sqrt{3x+16}-1}$

۹) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x+\sqrt{x+18}}{\sqrt{3x+7}-1}$ ۱۰) $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{\dfrac{x^2-9}{2x^2+7x+3}}$

۱۱) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ ۱۲) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+a^3}-a}{x}\quad (a\neq 0)$

۵- حدهای زیر را حساب کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{5x}$ ۲) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x^2-4)}{x-2}$

۳) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin(x+1)}{1-x^2}$ ۴) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\tan 3x}$

۵) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\tan 3x)-2x}{5x}$ ۶) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\sin 3x^2}{x^2\sin x}$

۷) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x}{x-1}$ ۸) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

۹) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^3\sin\frac{1}{x}\right)$ ۱۰) $\lim\limits_{x\to 2^-}\left((x^2-4)\cos\frac{1}{x-2}\right)$

۶- اگر برای هر x در فاصله $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ داشته باشیم:

$$3 - \cos^2 x \le f(x) \le 2 + x^2$$

مقدار $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ را محاسبه کنید.

۷- اگر برای هر x در هر همسایگی راست $x = 1$ داشته باشیم؛ $x^2 - 2x \le f(x) \le \frac{x^2-4}{x+2}$ مقدار $\lim\limits_{x \to 1^+} (2f(x) + 5)$ را به‌دست آورید.

۸- اگر برای هر x داشته باشیم $|f(x) - 4| \le (x-3)^2$، مقدار $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{f(x)}$ را به‌دست آورید.

۹- در تابع زیر، مقادیر a و b را چنان پیدا کنید که حد چپ و حد راست در نقطه $x = 2$ به ترتیب ۳ و ۵ باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2bx & 2 < x \\ 2ax - 3b & x \le 2 \end{cases}$$

۱۰- در تابع زیر رابطه‌ای بین a و b بیابید تا تابع در نقطه $x = 3$ حد داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 1 & x < 3 \\ 2 & x = 3 \\ bx^2 - a & 3 < x \end{cases}$$

۱۱- مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در $x = 1$ و $x = 2$ حد داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 2ax - b & x < 1 \\ bx^2 - 3a + 1 & 1 \le x \le 2 \\ \frac{a(x^2-4)}{x-2} & 2 < x \end{cases}$$

۱۲- اگر داشته باشیم: $f(x) = 3x^2 - x$، مقدار حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$　　۲) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$

۱۳- مقدار حدهای زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

۱) $\lim\limits_{x \to 0} ((x-1)\, sgn\, x)$　　۲) $\lim\limits_{x \to -3^+} \frac{(x+3)\, sgn(x^2-9)}{x^2-9}$

۳) $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^2 + \frac{|x|}{x}\right)$　　۴) $\lim\limits_{x \to 1^-} \left(\frac{|x-1|}{x^2-1} \sqrt{|x-1|}\right)$

۵) $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x-1}{[x]-1}$　　۶) $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x-1}{[x]-1}$

۷) $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{[x]^2 - [x^2]}{x - [x]}$　　۸) $\lim\limits_{x \to 1^-} ([x](x - [x])^2)$

۹) $\lim\limits_{x \to 2^+} ([x] + [-x])$　　۱۰) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} ([x] + [-x])$

۱۱) $\lim\limits_{x \to 2^+} |x - [x]|$　　۱۲) $\lim\limits_{x \to -4^+} |sgn(x) + 4|$

۱۳) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} ([x] + |1 - x|)$　　۱۴) $\lim\limits_{x \to -1} \left(\left[\frac{x^2}{x^2+2}\right](x^2 + 1)\right)$

۱۵) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|\sin x|}{x}$　　۱۶) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{|\cos x|}{x - \frac{\pi}{2}}$

۲-۳ پیوستگی

تعریف ۱: تابع f را در $x=a$ پیوسته گوییم، هرگاه: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

نکته: در تعریف فوق به‌طور ضمنی سه شرط برای پیوستگی تابع f در $x=a$ لازم است:

الف) $f(a)$ موجود باشد   ب) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجود باشد   ج) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

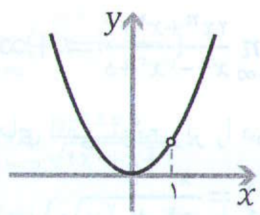
اگر حداقل یکی از سه شرط فوق برقرار نباشد، گوییم تابع f در $x=a$ پیوسته نیست یا گوییم f در $x=a$ یک ناپیوستگی دارد.

تعریف ۲: تابع f را در $x=a$ پیوسته از راست گوییم، هرگاه: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

تعریف ۳: تابع f را در $x=a$ پیوسته از چپ گوییم، هرگاه: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$

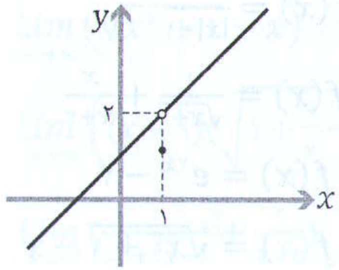
قضیه ۱: اگر تابع f در $x=a$ پیوستگی راست و پیوستگی چپ داشته باشد، آنگاه تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته است.

مثال ۱: تابع $f(x)=\frac{x^۳-x^۲}{x-۱}$ را در نظر بگیرید. چون $f(۱)$ تعریف نمی‌شود پس شرط اول پیوستگی برقرار نیست و لذا این تابع در $x=۱$ پیوسته نمی‌باشد. نمودار تابع f به صورت مقابل است.



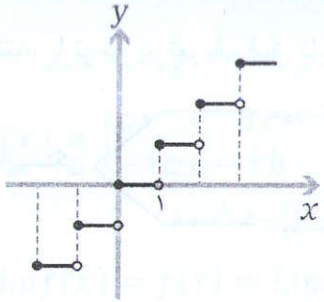
$$f(x)=\frac{x^۲(x-۱)}{x-۱}=x^۲ \quad (x\neq ۱)$$

مثال ۲: تابع $f(x)=\begin{cases} x+۱ & x\neq ۱ \\ ۱ & x=۱\end{cases}$ را در نظر بگیرید. در مورد این تابع داریم:



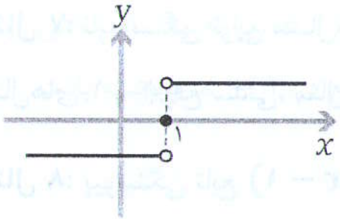
$f(۱)=۱$ و $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۲$ در نتیجه داریم: $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)\neq f(۱)$. پس شرط سوم پیوستگی برقرار نیست و لذا این تابع در $x=۱$ پیوسته نمی‌باشد. نمودار تابع f به صورت مقابل است.

مثال ۳: تابع $f(x)=[x]$ در نقطه $x=۱$ پیوسته نمی‌باشد زیرا $\lim\limits_{x\to ۱}[x]$ موجود نیست، ولی این تابع در نقطه $x=۱$ پیوستگی راست دارد زیرا:



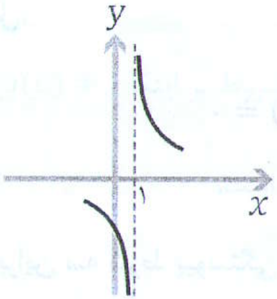
$$\lim_{x\to ۱^+}[x]=f(۱)=۱$$

مثال ۴: تابع $f(x)=sgn(x-۱)$ در نقطه $x=۱$ نه پیوستگی راست و نه پیوستگی چپ دارد زیرا:



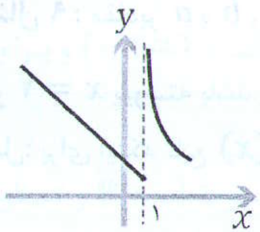
$\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۱\ ,\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=-۱\ ,\ f(۱)=۰$

مثال ۵: تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$ در نقطه $x=۱$ پیوسته نمی‌باشد، زیرا $f(۱)$ موجود نیست. برای این تابع داریم: $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=+\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=-\infty$



نمودار f در اطراف نقطه $x=۱$ به صورت مقابل است.

مثال ۶: تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x-۱} & x>۱ \\ ۲-x & x\leq ۱\end{cases}$ در نقطه $x=۱$ فقط پیوستگی چپ دارد. زیرا:



$\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=+\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=f(۱)=۱$

نمودار f در اطراف نقطه $x=۱$ به صورت مقابل است.

تعریف ۴: هرگاه برای تابع f در نقطه $x=a$ داشته باشیم:

الف) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ عددی حقیقی و $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq f(a)$، ناپیوستگی را **رفع‌شدنی** نامیم.

ب) حد چپ و حد راست اعدادی حقیقی ولی نابرابر باشند، ناپیوستگی را **جهشی** نامیم.

ج) حد چپ یا راست نامتناهی شود، ناپیوستگی را **نامتناهی** نامیم.

نکته: با توجه به تعریف فوق ناپیوستگی‌ها را به صورت زیر می‌توان دسته‌بندی کرد[1]:

- ناپیوستگی
  - ناپیوستگی رفع شدنی (برداشتنی)
  - ناپیوستگی رفع نشدنی (اساسی)
    - ناپیوستگی جهشی
    - ناپیوستگی نامتناهی

مثال ۷: ناپیوستگی توابع مثال‌های ۱ تا ۶ در نقطه $x = ۱$ به صورت زیر است: مثال‌های ۱ و ۲ رفع شدنی، مثال‌های ۳ و ۴ جهشی و مثال‌های ۵ و ۶ نامتناهی.

مثال ۸: پیوستگی تابع $f(x) = [x](x - ۱)$ را در نقطه $x = ۱$ بررسی کنید.

حل:

$$۱)\ f(۱) = [۱](۱ - ۱) = ۰$$

$$۲)\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+}(۱)(x - ۱) = ۰ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-}(۰)(x - ۱) = ۰ \end{array}\right\} \to \lim_{x\to ۱} f(x) = ۰$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۱} f(x) = f(۱) = ۰$$

بنابراین سه شرط پیوستگی برقرار است و لذا تابع $f(x)$ در $x = ۱$ پیوسته می‌باشد.

مثال ۹: مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که تابع

$$f(x) = \begin{cases} ax^۲ + ۲bx & x < ۲ \\ ۳ & x = ۲ \\ -۲ax - ۳b & x > ۲ \end{cases}$$

در $x = ۲$ پیوسته باشد.

حل: برای اینکه تابع $f(x)$ در $x = ۲$ پیوسته باشد باید داشته باشیم:

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = f(۲) = \lim_{x\to ۲^+} f(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^-}(ax^۲ + ۲bx) = ۴a + ۴b \\ f(۲) = ۳ \\ \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^+}(-۲ax - ۳b) = -۴a - ۳b \end{array}\right\} \to \begin{cases} ۴a + ۴b = ۳ \\ -۴a - ۳b = ۳ \end{cases}$$

پس از حل دستگاه اخیر مقادیر $b = ۶$ و $a = -۵/۲۵$ حاصل می‌شود.

۱- به این نوع دسته‌بندی در بحث انتگرال‌های غیر عادی (بخش ۶-۳) نیاز داریم.

مثال ۱۰: مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در $x = ۲$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax^۲ + ۲bx - ۲ & x \leq ۲ \\ -۲ax - ۳b & x > ۲ \end{cases}$$

حل: برای اینکه تابع $f(x)$ در $x = ۲$ پیوسته باشد باید داشته باشیم:

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = f(۲) = \lim_{x\to ۲^+} f(x) \to \cdots \to ۴a + ۴b - ۲ = -۴a - ۳b$$

پس از ساده کردن عبارت فوق داریم: $۸a + ۷b = ۲$، یعنی تعداد نامتناهی زوج (a, b) می‌توان معرفی کرد که به ازای آن دو مقدار، تابع در $x = ۲$ پیوسته باشد.

قضیه ۲: هرگاه f و g دو تابع پیوسته در a باشند، آنگاه:

الف) $f + g$ در a پیوسته است. **ب)** $f - g$ در a پیوسته است.

ج) $f \cdot g$ در a پیوسته است. **د)** $\frac{f}{g}$ در a پیوسته است، مشروط بر اینکه $g(a) \neq ۰$.

قضیه ۳: الف) یک تابع چندجمله‌ای، در هر نقطه‌ای پیوسته است.

ب) هر تابع گویا در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته است[1].

ج) توابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ در هر نقطه‌ای از $\mathbb{R}$ پیوسته می‌باشند.

د) تابع $f(x) = \sqrt[n]{x}$ برای nهای طبیعی زوج در هر نقطه فاصله $(۰, +\infty)$ و برای nهای طبیعی فرد غیر یک، در هر نقطه $\mathbb{R}$ پیوسته است.

ه) با فرض $a > ۰$ و $a \neq ۱$ تابع $f(x) = a^x$ در هر نقطه $\mathbb{R}$ و تابع $g(x) = Log_a x$ در هر نقطه $(۰, +\infty)$ پیوسته است.

و) اگر تابع g در a و تابع f در $g(a)$ پیوسته باشند، آنگاه تابع مرکب fog در a پیوسته است.

۱- هر تابع کسری که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای باشد **تابع گویا** و هر تابع کسری که صورت و مخرج آن نسبت‌های مثلثاتی باشد **تابع گویای مثلثاتی** نامیده می‌شود. از این دو تعریف در فصل پنجم نیز استفاده می‌شود.

مثال ۱۱: الف) $f(x) = ۲x^۲ - ۳x + ۱$ یک تابع چندجمله‌ای می‌باشد، پس بنابر قضیه ۳ در همه نقاط $\mathbb{R}$ پیوسته است.

ب) $f(x) = \frac{x-۱}{x^۲-۴}$ یک تابع گویا می‌باشد، پس بنابر قضیه ۳ به جز در $x = ۲$ و $x = -۲$ در بقیه نقاط $\mathbb{R}$ پیوسته است.

ج) تابع $f(x) = \sin x + ۲\cos x$ بنابر قضیه۲ و۳ در هر نقطه‌ای از $\mathbb{R}$ پیوسته است.

د) تابع $f(x) = \sqrt{\sin x}$ در $x = \frac{\pi}{۲}$ پیوسته است زیرا تابع $g(x) = \sin x$ در $x = \frac{\pi}{۲}$ پیوسته است و تابع $h(x) = \sqrt{x}$ در $x = g(\frac{\pi}{۲}) = ۱$ پیوسته است؛ لذا بنابر قضیه۳ تابع $f(x) = hog(x) = \sqrt{\sin x}$ در $x = \frac{\pi}{۲}$ پیوسته است.

تعریف ۵: الف) تابع f را در فاصله (a,b) پیوسته می‌گویند، هرگاه در تمام نقاط این فاصله پیوسته باشد.

ب) تابع f را در فاصله $[a,b)$ پیوسته می‌گویند، هرگاه در فاصله (a,b) پیوسته و در $x = a$ پیوستگی راست داشته باشد.

ج) تابع f را در فاصله $(a,b]$ پیوسته می‌گویند، هرگاه در فاصله (a,b) پیوسته و در $x = b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

د) تابع f را در فاصله $[a,b]$ پیوسته می‌گویند، هرگاه در فاصله (a,b) پیوسته و در $x = a$ پیوستگی راست و در $x = b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

نکته: تعبیر هندسی پیوستگی تابع در یک فاصله، این است که نمودار آن در هیچ‌جا قطع نشده باشد و بتوان نمودار آن را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ، رسم کرد.

مثال ۱۲: بزرگترین فاصله‌های پیوستگی چند تابع، در زیر مشخص شده است.

الف) تابع $f(x) = [x]$ در هر فاصله $[n, n+۱)$ که $n \in \mathbb{Z}$، پیوسته است.

ب) تابع $f(x) = sgn(x-۱)$ در $\mathbb{R}$ پیوسته نمی‌باشد زیرا در $x = ۱$ ناپیوسته است، ولی این تابع درفاصله‌های $(۱,+\infty)$ و $(-\infty,۱)$ پیوسته است.

ج) تابع گویای $f(x) = \frac{۳x-۱}{۴-x^۲}$ در نقاط $x = ۲$ و $x = -۲$ ناپیوسته است، بنابراین تابع f در فاصله‌های $(۲,+\infty)$ ، $(-۲,۲)$ و $(-\infty,-۲)$ پیوسته است.

د) تابع $f(x) = \sqrt{x^۲ - ۴}$ با توجه به دامنه‌اش که مجموعه $\mathbb{R} - (-۲,۲)$ می‌باشد در فاصله‌های $[۲,+\infty)$ و $(-\infty,-۲]$ پیوسته می‌باشد.

ه) تابع گویای مثلثاتی $f(x) = \frac{\sin x}{x^۲+۱}$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته است، زیرا صورت و مخرج کسر توابعی پیوسته بر $\mathbb{R}$ می‌باشند و مخرج آن در هیچ نقطه‌ای صفر نمی‌شود.

و) تابع $f(x) = \frac{۱}{(\ln x)-۱}$ با توجه به دامنه‌اش که مجموعه $(۰,+\infty) - \{e\}$ می‌باشد، در فاصله‌های $(e,+\infty)$ و $(۰,e)$ پیوسته است.

مثال ۱۳: مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر بر $\mathbb{R}$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ae^{x+۱} + x & x \le -۱ \\ ۲x - ۳x^۳ & -۱ < x \le ۰ \\ ۲^{x+۲} - b & ۰ < x \end{cases}$$

حل: هر یک از ضابطه‌های f به تنهایی بر $\mathbb{R}$ پیوسته است، بنابراین برای پیوستگی f بر $\mathbb{R}$ باید تابع در نقاط $x = ۰$ و $x = -۱$ پیوسته باشد؛ یعنی:

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} f(x) = f(۰)$$

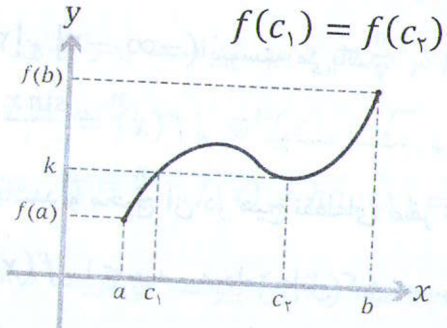
$$\lim_{x\to ۰^-}(۲x - ۳x^۳) = \lim_{x\to ۰^+}(۲^{x+۲} - b) = ۰ \to ۰ = ۴ - b = ۰ \to b = ۴$$

$$\lim_{x\to -۱^-} f(x) = \lim_{x\to -۱^+} f(x) = f(-۱)$$

$$\lim_{x\to -۱^-}(ae^{x+۱} + x) = \lim_{x\to -۱^+}(۲x - ۳x^۳) = a - ۱ \to a - ۱ = ۱ = a - ۱ \to a = ۲$$

قضیه ۴ (قضیه مقدار میانی): اگر تابع f در فاصله $[a,b]$ پیوسته و k عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد، در این صورت حداقل یک نقطه مانند $c \in (a,b)$ وجود دارد به‌طوری که: $f(c) = k$.

تذکر: نمودار زیر مفهوم قضیه مقدارمیانی را بهتر به ذهن می‌سپارد. در این شکل تابع f در فاصله $[a,b]$ پیوسته می‌باشد و برای عدد k، دو مقدار $c_۱$ و $c_۲$ وجود دارد به‌طوری که داریم: $f(c_۱) = f(c_۲) = k$



نکته: یافتن ریشه‌های یک معادله در حالت کلی کار دشواری است. به کمک نتیجه زیر که از قضیه مقدار میانی به‌دست می‌آید، می‌توان مکان ریشه‌های معادله را دقیق‌تر مشخص کرد.

نتیجه: اگر تابع f در فاصله $[a,b]$ پیوسته و $f(a)$ و $f(b)$ مختلف العلامه باشند، آنگاه حداقل یک نقطه مانند $c \in (a,b)$ وجود دارد به‌طوری که $f(c) = ۰$.

مثال ۱۴: نشان دهید معادله $x^۳ + x - ۱ = ۰$ دارای ریشه‌ای در فاصله $(۰,۱)$ می‌باشد.

حل: اگر فرض کنیم: $f(x) = x^۳ + x - ۱$، این تابع چندجمله‌ای در همه $\mathbb{R}$ از جمله در فاصله $[۰,۱]$ پیوسته است. همچنین در مورد این تابع داریم: $f(۰) = -۱$ و $f(۱) = ۱$. پس شرایط نتیجه قبل فراهم است و لذا عددی مانند $c \in (۰,۱)$ موجود است به‌طوری که $f(c) = ۰$. یعنی معادله $x^۳ + x - ۱ = ۰$ حداقل یک ریشه در فاصله $(۰,۱)$ دارد.

تمرین

۱- پیوستگی راست، پیوستگی چپ و پیوستگی توابع زیر را در نقطه $x_۰$ بررسی کنید.

۱) $f(x) = \frac{x+۲}{x^۲+۱}$, $x_۰ = -۱$ ۲) $f(x) = \sqrt[۳]{x + x^۲}$, $x_۰ = -۱$

۳) $f(x) = x - [x]$, $x_۰ = ۲$ ۴) $f(x) = \sqrt{۱ - x^۲}$, $x_۰ = ۱$

۵) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}\cos x & x \neq ۰ \\ ۱ & x = ۰ \end{cases}$, $x_۰ = ۰$

۶) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^۲+۲x-۳}{x-۱} & x \neq ۱ \\ ۵ & x = ۱ \end{cases}$, $x_۰ = ۱$

۷) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ۲x}{|\cos x|} & x \neq ۰ \\ ۲ & x = ۰ \end{cases}$, $x_۰ = ۰$

۸) $f(x) = \begin{cases} \frac{x+۱}{x-۱} & x > ۳ \\ ۲ & x = ۳ \\ ۵x - ۱۳ & x < ۳ \end{cases}$, $x_۰ = ۳$

۲- مقدار تابع f را در نقطه $x_۰$ چنان تعریف کنید که تابع در این نقطه پیوسته باشد.

۱) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq ۰ \\ ? & x = ۰ \end{cases}$ $x_۰ = ۰$ ۲) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^۲ x}{۱-\cos x} & x \neq ۰ \\ ? & x = ۰ \end{cases}$ $x_۰ = ۰$

۳) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^۲-۴}{x^۲-۵x+۶} & x \neq ۲ \\ ? & x = ۲ \end{cases}$ $x_۰ = ۲$ ۴) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-۲}{x-۴} & x \neq ۴ \\ ? & x = ۴ \end{cases}$ $x_۰ = ۴$

۳- مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که تابع f در نقطه $x_۰$ پیوسته باشد.

۱) $f(x) = \begin{cases} ۲ax + b & x > -۲ \\ ۵ & x = -۲ \\ bx^۲ + ۲x & x < -۲ \end{cases}$, $x_۰ = -۲$

۲) $f(x) = \begin{cases} ax^۲ + bx - ۱ & x \geq ۱ \\ ۲ax - ۳b & x < ۱ \end{cases}$, $x_۰ = ۱$

۴- برای توابع زیر، بزرگترین فاصله‌هایی را مشخص کنید که تابع بر آن‌ها پیوسته باشد.

۱) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-x+1}$ ۲) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

۳) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ ۴) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

۵- مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع f بر $\mathbb{R}$ پیوسته باشد.

۱) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-ax+2}$ ۲) $f(x) = \sqrt{x^2 + b}$

۳) $f(x) = \begin{cases} x + 2a & x \leq -2 \\ 3ax + b & -2 < x < 1 \\ 3x - 2b & 1 \leq x \end{cases}$ ۴) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & |x| < 2 \\ |x - 1| & |x| \geq 2 \end{cases}$

۶- الف) دو تابع مثال بزنید که در $x = 1$ ناپیوسته می‌باشند ولی مجموع آنها در $x = 1$ پیوسته است.

ب) دو تابع مثال بزنید که در $x = 1$ ناپیوسته می‌باشند ولی ضرب آنها در $x = 1$ پیوسته است.

۷- الف) با ذکر دلیل نشان دهید که معادله $x^3 - x - 1 = 0$ دارای ریشه‌ای در فاصله $(1,2)$ می‌باشد.

ب) با ذکر دلیل نشان دهید که معادله $x = \sin x + \frac{\pi}{2}$ دارای ریشه‌ای در فاصله $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ می‌باشد.

فصل سوم

مشتق

۳- ۱ تعریف مشتق

یکی دیگر از مفاهیم بنیادی و مهم ریاضیات مشتق می‌باشد که در مسائل کاربردی بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این فصل تعریف مشتق و قضیه‌های مربوط به آن را ارائه می‌کنیم و درفصل بعد به کاربردهای مشتق خواهیم پرداخت.

تعریف ۱: فرض کنید f یک تابع و $a \in D_f$ ، اگر $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ موجود باشد، می‌گوییم تابع f در نقطه a مشتق‌پذیر است و مقدار این حد را با نماد $f'(a)$ نمایش می‌دهیم و آن را مشتق تابع f در نقطه a می‌نامیم.

تذکر: عبارت‌های زیر معادل‌های دیگری برای تعریف مشتق تابع f در نقطه a می‌باشند.

۱) $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

۲) $f'(a) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

از عبارت شماره یک در محاسبه قوانین مشتق و از عبارت شماره دو در فصل کاربرد مشتق استفاده خواهیم کرد.

مثال ۱: مشتق تابع $f(x) = x^۲$ را در نقطه ۳ $= x$، در صورت وجود به‌دست آورید.

حل:

$$\lim_{x\to ۳} \frac{f(x)-f(۳)}{x-۳} = \lim_{x\to ۳} \frac{x^۲-۹}{x-۳} = \frac{۰}{۰} \quad (\text{مبهم})$$

$$\lim_{x\to ۳} \frac{x^۲-۹}{x-۳} = \lim_{x\to ۳} \frac{(x-۳)(x+۳)}{(x-۳)} = \lim_{x\to ۳}(x+۳) = ۶ \rightarrow f'(۳) = ۶$$

مثال ۲: مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در نقطه ۴ $= x$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

حل:

$$\lim_{x\to ۴} \frac{f(x)-f(۴)}{x-۴} = \lim_{x\to ۴} \frac{\sqrt{x}-۲}{x-۴} = \frac{۰}{۰} \quad (\text{مبهم})$$

$$\lim_{x\to ۴} \frac{\sqrt{x}-۲}{x-۴} = \lim_{x\to ۴} \frac{\sqrt{x}-۲}{x-۴} \times \frac{\sqrt{x}+۲}{\sqrt{x}+۲} = \lim_{x\to ۴} \frac{x-۴}{(x-۴)(\sqrt{x}+۲)}$$

$$= \lim_{x\to ۴} \frac{۱}{\sqrt{x}+۲} = \frac{۱}{۴} \rightarrow f'(۴) = \frac{۱}{۴}$$

مثال ۳: مشتق تابع $f(x) = \frac{۲x}{x-۱}$ را در نقطه ۱ $= x$ در صورت وجود به‌دست آورید.

حل: چون $۱ \notin D_f$ ، بنابر تعریف مشتق، این تابع در نقطه ۱ $= x$ مشتق ندارد.

مثال ۴: مشتق تابع $f(x) = |x|$ را در نقطه ۰ $= x$ در صورت وجود به‌دست آورید.

حل:

$$\lim_{x\to ۰} \frac{f(x)-f(۰)}{x-۰} = \lim_{x\to ۰} \frac{|x|-۰}{x-۰} = \lim_{x\to ۰} \frac{|x|}{x} = ?$$

$$\left.\begin{aligned} L &= \lim_{x\to ۰^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to ۰^+} ۱ = ۱ \\ L' &= \lim_{x\to ۰^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to ۰^-}(-۱) = -۱ \end{aligned}\right\} \rightarrow L \neq L'$$

بنابراین حد موجود نیست و لذا تابع $f(x)$ در نقطه ۰ $= x$ مشتق ندارد.

تعریف ۲: هرگاه f یک تابع و $a \in D_f$ ، مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطه $x = a$ به صورت زیر تعریف و نمایش داده می شود.

$$f'_-(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad (\text{مشتق چپ})$$

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad (\text{مشتق راست})$$

نتیجه: با توجه به قضیه‌های فصل حد و تعریف مشتق، $f'(a)$ موجود است اگر و تنها اگر $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ موجود و برابر باشند.

مثال ۵: برای تابع $f(x) = |x|$ با توجه به محاسبات مثال۴ داریم:

$f'_+(۰) = ۱$ ، $f'_-(۰) = -۱$ و چون $f'_-(۰) \neq f'_+(۰)$ پس $f'(۰)$ موجود نیست.

قضیه: اگر تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه در این نقطه پیوسته نیز است.

نتیجه: اگر تابع در نقطه‌ای ناپیوسته باشد، آنگاه در این نقطه مشتق‌پذیر نیست[1]. بنابراین برای بررسی مشتق‌پذیری یک تابع در یک نقطه، بهتر است ابتدا پیوستگی تابع را بررسی کنیم؛ زیرا اگر تابع پیوسته نباشد نیازی به عملیات بیشتر نمی‌باشد.

مثال ۶: مشتق‌پذیری تابع $f(x) = [x]$ را در نقطه ۲ $= x$ بررسی کنید.

حل: چون این تابع در نقطه ۲ $= x$ ناپیوسته است پس در این نقطه مشتق هم ندارد.

مثال ۷: مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} ۲x^۲ - x & x \geq ۱ \\ ۴x - ۲ & x < ۱ \end{cases}$ را در نقطه ۱ $= x$ بررسی کنید.

حل: ابتدا پیوستگی تابع f در نقطه ۱ $= x$ را بررسی می‌کنیم. داریم:

$$f(۱) = ۱ \ , \ \lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+}(۲x^۲ - x) = ۱ \ , \ \lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-}(۴x - ۲) = ۲$$

با توجه به تعریف پیوستگی، تابع در نقطه ۱ $= x$ پیوسته نیست. بنابراین تابع در نقطه ۱ $= x$ مشتق ندارد.

مثال ۸: مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ + ۲ & x \geq ۱ \\ ۲x + ۱ & x < ۱ \end{cases}$ را در نقطه ۱ $= x$ بررسی کنید.

حل: ابتدا پیوستگی تابع f در نقطه ۱ $= x$ را بررسی می‌کنیم. داریم:

۱- این نتیجه به استناد مطلب زیر حاصل شده است.

هرگاه p یک گزاره باشد، گزاره «چنین نیست که p» را نقیض p می‌گوییم و با علامت $\sim p$ نشان می‌دهیم. در ریاضی، دو گزاره «اگر p آنگاه q» و «اگر $\sim q$ آنگاه $\sim p$» هم ارزش می‌باشند.

از این مطلب در فصل یکم، هنگام ارائه تعریف معادلی برای تعریف تابع یک به یک نیز استفاده کردیم.

$f(1) = 3\ ,\ \underset{x\to 1^+}{Lim} f(x) = \underset{x\to 1^+}{Lim}(x^2+2) = 3\ ,\ \underset{x\to 1^-}{Lim} f(x) = \underset{x\to 1^-}{Lim}(2x+1) = 3$

با توجه به تعریف پیوستگی، تابع در نقطه $x = 1$ پیوسته است. اکنون می‌توان مشتق‌پذیری تابع f در این نقطه را بررسی کرد.

$$f'_+(1) = \underset{x\to 1^+}{Lim}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \underset{x\to 1^+}{Lim}\frac{(x^2+2)-3}{x-1} = \underset{x\to 1^+}{Lim}\frac{x^2-1}{x-1}$$
$$= \underset{x\to 1^+}{Lim}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \underset{x\to 1^+}{Lim}\ (x+1) = 2$$

$$f'_-(1) = \underset{x\to 1^-}{Lim}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \underset{x\to 1^-}{Lim}\frac{(2x+1)-3}{x-1} = \underset{x\to 1^-}{Lim}\frac{2(x-1)}{x-1} = 2$$

چون $f'_+(1) = f'_-(1) = 2$ بنابراین تابع f در نقطه $x = 1$ مشتق‌پذیر است و داریم: $f'(1) = 2$

مثال ۹: مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} ax+b & x<2 \\ x^2 & x\geq 2 \end{cases}$ در نقطه $x = 2$ مشتق‌پذیر باشد.

حل: شرط اول برای اینکه تابع f در $x = 2$ مشتق‌پذیر باشد این است که تابع در این نقطه پیوسته باشد، یعنی داشته باشیم: $\underset{x\to 2^+}{Lim} f(x) = \underset{x\to 2^-}{Lim} f(x) = f(2)$

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = 4 \\ \underset{x\to 2^+}{Lim} f(x) = \underset{x\to 2^+}{Lim}\ x^2 = 4 \\ \underset{x\to 2^-}{Lim} f(x) = \underset{x\to 2^-}{Lim}\ (ax+b) = 2a+b \end{array}\right\} \to 2a+b = 4\ \ (*)$$

شرط دوم برای اینکه تابع f در $x = 2$ مشتق‌پذیر باشد این است که مشتق چپ و راست f در این نقطه برابر باشد، یعنی داشته باشیم: $f'_-(2) = f'_+(2)$

$$f'_+(2) = \underset{x\to 2^+}{Lim}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \underset{x\to 2^+}{Lim}\frac{x^2-4}{x-2} = \underset{x\to 2^+}{Lim}\ (x+2) = 4$$

$$f'_-(2) = \underset{x\to 2^-}{Lim}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \underset{x\to 2^-}{Lim}\frac{(ax+b)-4}{x-2} = \underset{x\to 2^-}{Lim}\frac{(ax+b)-(2a+b)}{x-2}$$ (بنابر *)

$$= \underset{x\to 2^-}{Lim}\frac{a(x-2)}{x-2} = a \quad ,\quad f'_-(2) = f'_+(2) \to a = 4$$

و از عبارات $2a+b = 4$ و $a = 4$ نتیجه می‌شود: $b = -4$

تمرین

۱- با استفاده از تعریف مشتق، مشتق توابع زیر را در نقطه داده شده به‌دست آورید.

۱) $f(x) = 5\ ,\ x = 2$ ‏ ۲) $f(x) = 3x+2\ ,\ x = 1$

۳) $f(x) = x^2-2x\ ,\ x = 3$ ‏ ۴) $f(x) = x^3-2\ ,\ x = -2$

۵) $f(x) = \sqrt{2x+1}\ ,\ x = 4$ ‏ ۶) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}\ ,\ x = 0$

۷) $f(t) = \sin t\ ,\ t = 0$ ‏ ۸) $f(t) = \cos t\ ,\ t = \frac{\pi}{2}$

۲- با استفاده از تعریف مشتق، مشتق‌پذیری توابع زیر را در نقطه داده شده بررسی کنید.

۱) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x\leq 2 \\ 4x-3 & x>2 \end{cases}\ ,\ x = 2$

۲) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x\geq 0 \\ 1-x^2 & x<0 \end{cases}\ ,\ x = 0$

۳) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x\geq 1 \\ 2-x & x<1 \end{cases}\ ,\ x = 1$

۴) $f(x) = \begin{cases} 3-2x & x\geq 1 \\ 2-x & x<1 \end{cases}\ ,\ x = 1$

۵) $f(x) = \sqrt{x^2(x+2)}\ ,\ x = 0$ ‏ ۶) $f(x) = (x-1)[x]\ ,\ x = 1$

۷) $f(x) = \sqrt{|x|}\ ,\ x = 0$ ‏ ۸) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}\ ,\ x = 0$

۳- مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که هر یک از توابع زیر در نقطه $x = 1$ مشتق‌پذیر باشد.

۱) $f(x) = \begin{cases} ax+b & x<1 \\ x^2+1 & x\geq 1 \end{cases}$ ‏ ۲) $f(x) = \begin{cases} x^3+x & x\leq 1 \\ ax+b & x>1 \end{cases}$

۳) $f(x) = \begin{cases} x^2+3x+a & x\leq 1 \\ bx+2 & x>1 \end{cases}$ ‏ ۴) $f(x) = \begin{cases} ax^2+1 & x\leq 1 \\ bx-8 & x>1 \end{cases}$

۲-۳ قوانین مشتق‌گیری

محاسبه مشتق تابع f در نقاط مختلف به کمک تعریف اغلب طولانی و مشکل است، لذا به دنبال یافتن قانون‌هایی هستیم که به کمک آنها مشتق یک تابع را در هر نقطه‌ای سریع محاسبه کنیم. مثال‌های زیر روش یافتن چنین قانون‌هایی را توضیح می‌دهد.

مثال ۱: تابع $f(x) = x^2$ را در نظر بگیرید، می‌خواهیم مشتق تابع را در یک نقطه دلخواه به‌دست آوریم، به طور موقت x را مقداری ثابت فرض کرده و برای محاسبه مشتق تابع f در نقطه x از فرمول مقابل استفاده می‌کنیم: $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \frac{0}{0} \quad (\text{مبهم})$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

بنابراین برای تابع $f(x) = x^2$ همواره داریم: $f'(x) = 2x$

به عنوان نمونه مشتق تابع f در نقطه‌های $x = 0$ ، $x = 2$ و $x = -1$ عبارت است از:

$$f'(0) = 0 \quad , \quad f'(2) = 4 \quad , \quad f'(-1) = -2$$

مثال ۲: قانونی برای محاسبه مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x}$ به‌دست آورید.

حل: فرض کنیم x نقطه دلخواهی از دامنه f باشد، داریم:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{0}{0} \quad (\text{مبهم})$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \to f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال ۳: قانونی برای محاسبه مشتق از تابع $f(x) = \sin x$ به‌دست آورید.

حل: $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{0}{0} \quad (\text{مبهم})$

برای رفع ابهام از فرمول $\sin a - \sin b = 2\cos(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})$ استفاده می‌کنیم.

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos(\frac{x+h+x}{2})\sin(\frac{x+h-x}{2})}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin(\frac{h}{2})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}2\cos(x+\frac{h}{2})\frac{\sin(\frac{h}{2})}{h} = 2\lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2})\lim_{h\to 0}\frac{\sin(\frac{h}{2})}{h}$$

$$= (2\cos x)(\frac{1}{2}) = \cos x \to f'(x) = \cos x$$

تذکر: در مثال‌های فوق مشاهده می‌کنید که به ازای هر تابع، تابع دیگری حاصل می‌شود. به این تابع جدید، تابع مشتق می‌گویند. یافتن تابع مشتق به کمک تعریف حتی برای توابع ساده نیاز به عملیات زیادی دارد. ریاضی‌دانان با اثبات تعدادی قضیه، قانون‌هایی را ارائه کرده‌اند که به کمک آنها تابع مشتق را به سادگی می‌توان محاسبه کرد. در این کتاب به غیر از چند مورد بقیه قوانین را بدون اثبات بیان و مورد استفاده قرار می‌دهیم. برای اختصار، هر چند قانون را در قالب یک قضیه بیان کرده‌ایم.

قضیه ۱: فرض کنید c و n مقادیر حقیقی و ثابت و توابع g و h در نقطه x مشتق‌پذیر باشند، آنگاه داریم:

۱) $f(x) = c \to f'(x) = 0$

۲) $f(x) = x^n \to f'(x) = nx^{n-1}$

۳) $f(x) = cg(x) \to f'(x) = cg'(x)$

۴) $f(x) = g(x) \pm h(x) \to f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$

۵) $f(x) = g(x)h(x) \to f'(x) = g'(x)h(x) + h'(x)g(x)$

۶) $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \to f'(x) = \frac{g'(x)h(x)-h'(x)g(x)}{h^2(x)} \quad (h(x) \neq 0)$

مثال ۴: مشتق توابع زیر به کمک قضیه ۱ محاسبه شده است.

۱) $f(x) = 5 \to f'(x) = 0$

۲) $f(x) = x^2 \to f'(x) = 2x^{2-1} = 2x$

۳) $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \to f'(x) = (-1)x^{-1-1} = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

۴) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \to f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

۵) $f(x) = 5x^3 \to f'(x) = 5(x^3)' = 5(3x^2) = 15x^2$

۶) $f(x) = \sqrt{x} + x^2 \to f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x$

۷) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x \to f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$

۸) $f(x) = (\sqrt{x} + 1)(x^2 + 3x)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + 3x) + (\sqrt{x} + 1)(2x + 3)$$

۹) $f(x) = \frac{2x+1}{5x-3} \to f'(x) = \frac{2(5x-3)-5(2x+1)}{(5x-3)^2} = \frac{-11}{(5x-3)^2}$

قضیه ۲: با فرض اینکه x برحسب رادیان است، مشتق توابع مثلثاتی ساده به صورت زیر می‌باشد[1].

۱) $f(x) = \sin x \to f'(x) = \cos x$

۲) $f(x) = \cos x \to f'(x) = -\sin x$

۳) $f(x) = \tan x \to f'(x) = 1 + \tan^2 x$

۴) $f(x) = \cot x \to f'(x) = -(1 + \cot^2 x)$

۵) $f(x) = \sec x \to f'(x) = \sec x \tan x$

۶) $f(x) = \csc x \to f'(x) = -\csc x \cot x$

مثال ۵: اثبات قوانین شماره ۳ و ۵ قضیه ۲ به کمک سایر قوانین به صورت زیر است:

۱) $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \to f'(x) = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{(\cos x)^2}$

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

۱- علت اینکه x باید برحسب رادیان باشد این است که به عنوان نمونه در محاسبه مشتق تابع $f(x) = \sin x$ داریم: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{(x+h)-x}$. در تابع $y = \frac{\sin(x+h)-\sin x}{(x+h)-x}$ صورت کسر، عددی حقیقی برحسب واحد طول است، لذا مخرج هم یعنی x و $x+h$ باید اعداد حقیقی برحسب واحد طول باشند. می‌دانیم رادیان واحدی برای اندازه‌گیری زاویه برحسب طول است، پس x و $x+h$ را برحسب رادیان در نظر می‌گیریم.

۲) $f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$

$$f'(x) = \frac{(0)(\cos x)-(1)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}\,\frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x$$

مثال ۶: مشتق توابع زیر به کمک قوانین مشتق محاسبه شده است.

۱) $f(x) = 5\sin x + 3\cos x \to f'(x) = 5\cos x - 3\sin x$

۲) $f(x) = x^2 \sec x \to f'(x) = 2x \sec x + x^2 \sec x \tan x$

۳) $f(x) = \sin x \tan x$

$$f'(x) = \cos x \tan x + \sin x\,(1 + \tan^2 x) = \sin x\,(2 + \tan^2 x)$$

۴) $f(x) = \frac{\cos x}{1-\sin x} \to f'(x) = \frac{(-\sin x)(1-\sin x) - \cos x(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$

$$f'(x) = \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1-\sin x)^2} = \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2} = \frac{1}{1-\sin x}$$

قضیه ۳: مشتق توابع معکوس مثلثاتی به صورت زیر می‌باشد[1].

۱) $f(x) = \sin^{-1} x = \mathrm{Arc}\sin x \to f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

۲) $f(x) = \cos^{-1} x = \mathrm{Arc}\cos x \to f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

۳) $f(x) = \tan^{-1} x = \mathrm{Arc}\tan x \to f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

۴) $f(x) = \cot^{-1} x = \mathrm{Arc}\cot x \to f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$

۵) $f(x) = \sec^{-1} x = \mathrm{Arc}\sec x \to f'(x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

۶) $f(x) = \csc^{-1} x = \mathrm{Arc}\csc x \to f'(x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

تذکر: اثبات بعضی از قوانین فوق را به کمک مشتق‌گیری ضمنی، در بخش بعد (بخش ۳-۳) مشاهده خواهید کرد.

۱- ممکن است برای مشتق دو تابع $\sec^{-1} x$ و $\csc^{-1} x$ در کتاب‌های دیگر فرمول‌هایی بدون قدرمطلق مشاهده کنید. علت این می‌باشد که در محدود کردن دامنه دو تابع سکانت و کسکانت برای اینکه معکوس داشته باشند نظر یکسانی وجود ندارد. به عنوان نمونه اگر برای $\sec x$ دامنه را مجموعه $[0,\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2},\pi]$ انتخاب کنیم در فرمول مشتق $\sec^{-1} x$، قدرمطلق ظاهر می‌شود. این انتخاب از جهت محاسبه مقادیری مانند $\sec^{-1}(-5)$ با ماشین حساب‌های علمی، راحت‌تر می‌باشد. در این مورد داریم: $\sec^{-1}(-5) = \cos^{-1}(\frac{-1}{5})$

مثال ۷: مشتق توابع زیر به کمک قضیه‌های قبل محاسبه شده است.

۱) $f(x) = 4\sin^{-1}x + 3\cos^{-1}x \rightarrow f'(x) = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

۲) $f(x) = \tan^{-1}x + \cot^{-1}x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{1+x^2} = 0$

۳) $f(x) = x^2\sin^{-1}x \rightarrow f'(x) = 2x\sin^{-1}x + x^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

قضیه ۴: مشتق توابع نمایی و لگاریتمی به صورت زیر می‌باشد. ($a > 0$ و $a \neq 1$)

۱) $f(x) = a^x \rightarrow f'(x) = (Ln\, a)a^x$

۲) $f(x) = Log_a\, x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{(Ln\, a)x} \quad (x > 0)$

چون $Ln\, e = 1$ ، پس برای $a = e$ فرمول‌های فوق به صورت زیر می‌باشد.

۳) $f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$

۴) $f(x) = Ln\, x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$

مثال ۸: مشتق توابع زیر به کمک قضیه‌های قبل محاسبه شده است.

۱) $f(x) = e^x \sin x$

$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$

۲) $f(x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x} \rightarrow f'(x) = \frac{(0)e^x - (1)e^x}{(e^x)^2} = \frac{-e^x}{e^{2x}} = -e^{-x}$

۳) $f(x) = \frac{3^x}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{(Ln\, 3)3^x x - 3^x}{x^2} = \frac{3^x(x(Ln\, 3) - 1)}{x^2}$

۴) $f(x) = x\, Log_2\, x$

$f'(x) = (1)\, Log_2\, x + (x)\frac{1}{(Ln\, 2)x} = \frac{Ln\, x}{Ln\, 2} + \frac{1}{Ln\, 2} = \frac{(Ln\, x)+1}{Ln\, 2} = \frac{1+Ln\, x}{Ln\, 2}$

تذکر: مشتق تابع $f(x) = e^{-x}$ در صفحات بعد به کمک قضیه مشتق تابع مرکب راحت‌تر محاسبه می‌شود. ولی قبل از بیان آن قضیه، به مشتق این تابع در مثال ۹ صفحه بعد نیاز داریم.

قضیه ۵: مشتق توابع هیپربولیک به صورت زیر می‌باشد (این قوانین تشابه زیادی با قوانین مشتق توابع مثلثاتی دارد).

۱) $f(x) = \sinh x \rightarrow f'(x) = \cosh x$

۲) $f(x) = \cosh x \rightarrow f'(x) = \sinh x$

۳) $f(x) = \tanh x \rightarrow f'(x) = 1 - \tanh^2 x$

۴) $f(x) = \coth x \rightarrow f'(x) = 1 - \coth^2 x$

مثال ۹: اثبات دو مورد از قوانین فوق به کمک سایر قوانین به صورت زیر است.

۱) $f(x) = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$f'(x) = \frac{1}{2}[(e^x)' - (e^{-x})'] = \frac{1}{2}\left(e^x - (-e^{-x})\right)$ (بنابر مثال ۸ قسمت ۲)

$= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$

۲) $f(x) = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \rightarrow f'(x) = \frac{\cosh x \cosh x - \sinh x \sinh x}{(\cosh x)^2}$

$f'(x) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{(\cosh x)^2} = \frac{1}{(\cosh x)^2} = 1 - \tanh^2 x$

تذکر: مشتق تابع $y = f(x)$ را غیر از نمادهای $f'(x)$ و y' با نمادهای دیگری مانند $\frac{dy}{dx}$ یا $\frac{df(x)}{dx}$ نیز نمایش می‌دهند. این نمادهای جدید در محاسبه و نمایش مشتق تابع مرکب بسیار مفید می‌باشند.

قضیه ۶ (قضیه مشتق تابع مرکب یا قاعده زنجیره‌ای): هرگاه f و g توابعی مشتق‌پذیر باشند، مشتق تابع مرکب fog نسبت به x ، با فرض $u = g(x)$ و $y = fog(x) = f(u)$ به صورت مقابل محاسبه می‌شود.

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{df(u)}{du}\,\frac{du}{dx}}$$

نکته ۱: مشتق تابع مرکب fog را به صورت‌های زیر نیز نمایش می‌دهند.

$y = f(g(x)) \rightarrow y' = g'(x)\, f'(g(x))$

$y = f(u) \rightarrow y' = u'\, f'(u)$

نکته ۲: قضیه مشتق تابع مرکب را از این جهت **قاعده زنجیره‌ای** یا **قاعده زنجیری** می‌گویند که با اضافه کردن حلقه‌ای دیگر، زنجیری بلندتر ساخته می‌شود. تصور کنید $y = f(u)$, $u = g(x)$ و $x = h(t)$ که در آن f ، g و h توابعی مشتق‌پذیرند، آنگاه برای محاسبه مشتق y نسبت به t بنابر قانون مشتق تابع مرکب داریم:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}$$

مثال ۱۰: اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2 + 5x$ مشتق تابع $fog(x)$ را بیابید.

حل:

$$y = fog(x) = f\big(g(x)\big) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{u} = f(u) \quad \Big| \quad u = x^2 + 5x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(u)}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x + 5) = \frac{2x+5}{2\sqrt{x^2+5x}} \quad \Big| \quad \frac{du}{dx} = 2x + 5$$

مثال ۱۱: اگر $f(x) = x^3$ مشتق تابع $y = f(\sin x)$ را به‌دست آورید.

حل:

$$y = f(\sin x) = (\sin x)^3 = u^3 = f(u) \quad \Big| \quad u = \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(u)}{du}\frac{du}{dx} = 3u^2 \cos x = 3\sin^2 x \cos x \quad \Big| \quad \frac{du}{dx} = \cos x$$

مثال ۱۲: اگر $f'(x) = \frac{1}{x}$ مشتق تابع $y = f(x^2 + 1)$ را به‌دست آورید.

حل:

$$y = f(x^2 + 1) = f(u) \quad \Big| \quad u = x^2 + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(u)}{du}\frac{du}{dx} = f'(u)\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}(2x) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2+1} \quad \Big| \quad \frac{du}{dx} = 2x$$

مثال ۱۳: مشتق تابع $y = \sin 5x$ را به‌دست آورید.

حل: با فرض $f(x) = \sin x$ و $u = 5x$ ، داریم:

$$y = \sin 5x = \sin u = f(u) \quad \Big| \quad u = 5x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(u)}{du}\frac{du}{dx} = (\cos u)(5) = 5\cos 5x \quad \Big| \quad \frac{du}{dx} = 5$$

نتیجه: هرگاه u تابعی مشتق‌پذیر از x باشد، از قضیه مشتق تابع مرکب نتایج زیر حاصل می‌شود.

۱) $(u^n)' = nu'u^{n-1} \quad (n \in \mathbb{R})$ ۲) $(\frac{1}{u})' = \frac{-u'}{u^2}$

۳) $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ ۴) $(\sqrt[m]{u^n})' = \frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}} \quad (m, n \in \mathbb{N}, m \neq 1)$

۵) $(\sin u)' = u'\cos u$ ۶) $(\cos u)' = -u'\sin u$

۷) $(\tan u)' = u'(1 + \tan^2 u)$ ۸) $(\cot u)' = -u'(1 + \cot^2 u)$

۹) $(\sec u)' = u'\sec u \tan u$ ۱۰) $(\csc u)' = -u'\csc u \cot u$

۱۱) $(\sin^{-1} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ ۱۲) $(\cos^{-1} u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

۱۳) $(\tan^{-1} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$ ۱۴) $(\cot^{-1} u)' = \frac{-u'}{1+u^2}$

۱۵) $(\sec^{-1} u)' = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$ ۱۶) $(\csc^{-1} u)' = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$

۱۷) $(e^u)' = u'e^u$ ۱۸) $(a^u)' = u'(Ln\, a)a^u$

۱۹) $(Ln\, u)' = \frac{u'}{u}$ ۲۰) $(Log_a u)' = \frac{u'}{(Ln\, a)u}$

۲۱) $(\sinh u)' = u'\cosh u$ ۲۲) $(\cosh u)' = u'\sinh u$

۲۳) $(\tanh u)' = u'(1 - \tanh^2 u)$ ۲۴) $(\coth u)' = u'(1 - \coth^2 u)$

تذکر ۱: فرمول‌های ۲ ، ۳ و ۴ از فرمول ۱ نتیجه می‌شوند. هم‌چنین فرمول ۱۷ حالت خاص فرمول ۱۸ و فرمول ۱۹ حالت خاص فرمول ۲۰ می‌باشد، ولی چون این فرمول‌ها در مسائل مختلف بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرند، آنها را به صورت فرمول مستقل آورده‌ایم.

تذکر ۲: در فرمول‌های نتیجه قبل با فرض $u = x$ داریم: $u' = 1$ و لذا همان فرمول‌های مشتق در قضیه‌های قبل حاصل می‌شود. مجموعه این قوانین را در پایان کتاب در قسمت پیوست‌ها هم آورده‌ایم.

مثال ۱۴: مشتق توابع زیر، به کمک قوانین محاسبه شده است.

۱) $y = (x^2 + 3x)^5 \rightarrow y = u^5$ $\quad\Big|\quad u = x^2 + 3x$

$y' = 5u'u^4 = 5(2x+3)(x^2+3x)^4$ $\quad\Big|\quad u' = 2x + 3$

۲) $y = \sin\sqrt{x} \rightarrow y = \sin u$ $\quad\Big|\quad u = \sqrt{x}$

$y' = u'\cos u = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$ $\quad\Big|\quad u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

۳) $y = \cos^3 x \rightarrow y = u^3$ $\quad\Big|\quad u = \cos x$

$y' = 3u'u^2 = -3\sin x\cos^2 x$ $\quad\Big|\quad u' = -\sin x$

۴) $y = \sqrt{x^2+1} \rightarrow y = \sqrt{u}$ $\quad\Big|\quad u = x^2 + 1$

$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad\Big|\quad u' = 2x$

۵) $y = e^{\sin x} \rightarrow y = e^u$ $\quad\Big|\quad u = \sin x$

$y' = u'e^u = \cos x\, e^{\sin x}$ $\quad\Big|\quad u' = \cos x$

۶) $y = Ln(x^2 - 4) \rightarrow y = Ln\, u$ $\quad\Big|\quad u = x^2 - 4$

$y' = \frac{u'}{u} = \frac{2x}{x^2-4}$ $\quad\Big|\quad u' = 2x$

۷) $y = Log_2(e^x + x) \rightarrow y = Log_2 u$ $\quad\Big|\quad u = e^x + x$

$y' = \frac{u'}{(Ln 2)u} = \frac{e^x+1}{(Ln 2)(e^x+x)}$ $\quad\Big|\quad u' = e^x + 1$

۸) $y = \sin^{-1}(e^x + 2x) \rightarrow y = \sin^{-1} u$ $\quad\Big|\quad u = e^x + 2x$

$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{e^x+2}{\sqrt{1-(e^x+2x)^2}}$ $\quad\Big|\quad u' = e^x + 2$

۹) $y = (\tan^{-1} x)^2 \rightarrow y = u^2$ $\quad\Big|\quad u = \tan^{-1} x$

$y' = 2u'u = 2(\frac{1}{1+x^2})\tan^{-1} x = \frac{2\tan^{-1} x}{1+x^2}$ $\quad\Big|\quad u' = \frac{1}{1+x^2}$

۱۰) $y = cosh(\frac{1}{x}) \rightarrow y = cosh\, u$ $\quad\Big|\quad u = \frac{1}{x}$

$y' = u'\sinh u = -\frac{1}{x^2}\sinh(\frac{1}{x})$ $\quad\Big|\quad u' = -\frac{1}{x^2}$

۱۱) $y = \sin^5(x^2+3) \rightarrow y = u^5$

$y' = 5u'u^4$

$= 5(2x\cos(x^2+3))(\sin(x^2+3))^4$

$= 10x\cos(x^2+3)\sin^4(x^2+3)$

$u = \sin(x^2+3) = \sin v$, $\quad u' = v'\cos v$, $\quad u' = 2x\cos(x^2+3)$ $\quad\Big|\quad v = x^2+3$, $\quad v' = 2x$

۱۲) $y = Ln(e^{\sqrt{x}} + 2) \rightarrow y = Ln\, u$

$y' = \frac{u'}{u} = \frac{\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}}+2}$

$= \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(e^{\sqrt{x}}+2)}$

$u = e^{\sqrt{x}} + 2 = e^v + 2$, $\quad u' = v'e^v$, $\quad u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$ $\quad\Big|\quad v = \sqrt{x}$, $\quad v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

۱۳) $y = (2x-1)^3(8x^2+3)^5$

$y = u^3v^5$

$y' = (u^3)'v^5 + u^3(v^5)'$

$= 3u'u^2v^5 + u^3(5v'v^4)$

$= 3(2)(2x-1)^2(8x^2+3)^5 + 5(2x-1)^3(16x)(8x^2+3)^4$

$= (2x-1)^2(8x^2+3)^4[6(8x^2+3) + 80x(2x-1)]$

$= (2x-1)^2(8x^2+3)^4(208x^2 - 80x + 18)$

$u = 2x - 1$, $\quad v = 8x^2 + 3$ $\quad\Big|\quad u' = 2$, $\quad v' = 16x$

۱۴) $y = 2^{x^2}3^{8x}$

$y = 2^u3^v$

$y' = (2^u)'3^v + 2^u(3^v)'$

$u = x^2$, $\quad v = 8x$ $\quad\Big|\quad u' = 2x$, $\quad v' = 8$

$= (u' Ln 2\; 2^u)3^v + 2^u(v' Ln 3\; 3^v)$

$= 2^u3^v(u' Ln 2 + v' Ln 3)$

$= 2^{x^2}3^{8x}(2x Ln 2 + 8 Ln 3)$

تمرین

۱- با استفاده از تعریف مشتق، تابع مشتق را برای توابع زیر بیابید.

۱) $f(x) = x^۳ + ۱$ ۲) $f(x) = x^۲ + ۲x - ۱$

۳) $f(x) = \frac{x}{x+۱}$ ۴) $f(x) = \sqrt{۲x - ۱}$

۲- مشتق توابع زیر را به کمک قوانین مشتق به‌دست آورید.

۱) $f(x) = \frac{۱}{۴}x^۸ - x^۴$ ۲) $v(r) = \frac{۴}{۳}\pi r^۳$

۳) $s(r) = \frac{۱}{۲}(\pi r^۲ + ۱۰\pi r)$ ۴) $f(x) = \frac{x^۴}{۴} + \frac{۲}{x^۲}$

۵) $g(h) = \frac{۲h-۳}{h+۲}$ ۶) $g(x) = \frac{x^۲+۲x-۱}{۳x+۲}$

۷) $f(x) = (x^۲ - ۵x)(x^۷ - ۸x + ۱$ ۸) $f(x) = x^۲ \cot x$

۹) $g(x) = ۳\cos x - x\sin x$ ۱۰) $g(t) = t^۳ \sec t$

۱۱) $h(z) = \frac{\sin z - ۱}{\cos z + ۱}$ ۱۲) $g(z) = \frac{۲\sin z}{۲+z}$

۱۳) $h(t) = t^۳ Ln\, t$ ۱۴) $h(x) = e^x \cos x$

۱۵) $f(x) = (x^۲ + x)(e^x + ۱)$ ۱۶) $f(x) = Log_۳ x - xe^x$

۱۷) $g(x) = ۵^x \sin x$ ۱۸) $g(x) = (۲ + Ln\, x)(e^x + ۳)$

۱۹) $f(x) = x^۲ \tanh x$ ۲۰) $f(x) = ۲\sinh x \cosh x$

۲۱) $f(x) = \sin^{-۱} x + \cos^{-۱} x$ ۲۲) $f(x) = ۲\tan^{-۱} x + ۳\cot^{-۱} x$

۲۳) $f(x) = x^۲ \cos^{-۱} x$ ۲۴) $f(x) = \sqrt{x}\tan^{-۱} x$

۳- مشتق تابع fog را به‌دست آورید.

۱) $f(x) = ۲^{x-۱}$, $g(x) = ۱ + \sin x$

۲) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^۳ + ۳x - ۱$

۴- مشتق تابع y را به‌دست آورید.

۱) $f'(x) = ۲x^۲ - ۳x$, $y = f(\frac{۱}{x})$

۲) $f'(x) = ۸x - ۵$, $y = f(xe^x)$

۵- مشتق توابع زیر را به کمک قاعده زنجیره‌ای و سایر قوانین مشتق به‌دست آورید.

۱) $f(x) = (۳x - x^۳)^۵$ ۲) $f(x) = \sqrt[۳]{(x^۲ - ۵x)^۲}$

۳) $g(x) = \frac{۳}{\sqrt{۵x+۱}}$ ۴) $g(x) = \frac{۲}{\sqrt[۳]{۵x-x^۲}}$

۵) $f(x) = \cos(۳x^۲ + ۳)$ ۶) $f(x) = \tan(۲x + ۱)$

۷) $f(x) = \cos ۳x - ۲\sin ۵x$ ۸) $f(x) = \tan(۲x) + \cos ۷x$

۹) $f(x) = \sin ۵x \cot ۲x$ ۱۰) $h(x) = x^۲ \sin(۲x + ۱)$

۱۱) $f(x) = \sqrt{\sin(۲x - x^۲)}$ ۱۲) $f(x) = \sin^۳ ۵x$

۱۳) $h(x) = ۲e^{۵x} + ۱$ ۱۴) $f(x) = ۴^{\sin x}$

۱۵) $f(x) = e^x \cos(e^x)$ ۱۶) $g(x) = x^۵ e^{-۳ Ln\, x}$

۱۷) $f(x) = Ln(۳x + ۲)$ ۱۸) $g(x) = Ln \sqrt[۳]{۴ + ۲x}$

۱۹) $f(x) = Ln^۳(۳x - ۱)$ ۲۰) $h(x) = \cos(Ln\, x)$

۲۱) $g(x) = x\log_۲(x^۲ + ۱)$ ۲۲) $h(x) = Ln(\sin ۲x)$

۲۳) $f(x) = Ln(Ln(x + ۱))$ ۲۴) $g(x) = \cos(۳^{x^۲})$

۲۵) $f(x) = \cos^{-۱}(e^{۲x})$ ۲۶) $f(x) = \tan^{-۱}(۲x^۲ + ۳)$

۲۷) $f(x) = \sin^{-۱}\sqrt{۱ - x^۲}$ ۲۸) $f(x) = Ln(\tan^{-۱} ۲x)$

۲۹) $f(x) = \sinh(۵x - ۳)$ ۳۰) $g(x) = \tanh(e^x - ۲)$

۳۱) $h(x) = \frac{(۲x+۱)^۳}{(x-۱)^۴}$ ۳۲) $f(x) = (x^۲ + ۱)^۵(x^۳ - x)^۲$

۳۳) $g(x) = ۲^{۵x}\, ۳^{x^۲}$ ۳۴) $h(x) = (x + ۱)^۳ e^{۵x+۱}$

۳-۳ مشتق مراتب بالاتر، مشتق‌گیری ضمنی، لگاریتمی و پارامتری

۱) مشتق مراتب بالاتر

اگر f تابعی مشتق‌پذیر باشد آنگاه f' نیز، یک تابع است. اگر f' مشتق‌پذیر باشد مشتق آن را در صورت وجود با f'' نشان داده و آن را مشتق مرتبه دوم f می‌نامند. به طور مشابه مشتق تابع f'' را با f''' نشان داده و آن را مشتق مرتبه سوم f می‌گویند[1]. در حالت کلی مشتق مرتبه nام f را با علامت $\frac{d^n f}{dx^n}$ یا $f^{(n)}(x)$ نمایش می‌دهند.

مثال ۱: مشتق مرتبه‌های مختلف تابع $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 15$ به صورت زیر است:

$$f'(x) = 8x^3 - 6x \quad , \quad f''(x) = 24x^2 - 6 \quad , \quad f'''(x) = 48x$$

$$f^{(4)}(x) = 48 \quad , \quad f^{(n)}(x) = 0 \quad (n \geq 5)$$

مثال ۲: مشتق مرتبه‌های مختلف تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ به صورت زیر است:

$$f(x) = x^{-1} \quad , \quad f'(x) = -x^{-2} \quad , \quad f''(x) = 2x^{-3}$$

$$f'''(x) = -6x^{-4} \quad , \quad f^{(4)}(x) = 24x^{-5} \quad , \quad f^{(5)}(x) = -120 x^{-6}$$

در حالت کلی مشتق مرتبه nام این تابع به صورت $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ می‌باشد.

مثال ۳: مشتق مرتبه‌های مختلف تابع $f(x) = \cos x$ به صورت زیر است:

$$f^{(1)}(x) = -\sin x \; , f^{(2)}(x) = -\cos x \; , f^{(3)}(x) = \sin x \; , f^{(4)}(x) = \cos x$$

$$f^{(5)}(x) = -\sin x \; , f^{(6)}(x) = -\cos x \; , f^{(7)}(x) = \sin x \; , f^{(8)}(x) = \cos x \; , \ldots$$

به طور کلی می‌توان نوشت:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} -\sin x & n = 4k-3 \\ -\cos x & n = 4k-2 \\ \sin x & n = 4k-1 \\ \cos x & n = 4k \end{cases} \quad , \; k \in \mathbb{N}$$

۱- عبارت‌های f' ، f'' و f''' ، هماهنگ با زبان فرانسه به ترتیب اِف‌پریم، اِف‌زگوند و اِف‌تی‌یِرث تلفظ می‌شود. این تلفظ‌ها، معادل کلمات انگلیسی Prime ، Second و Third می‌باشد.

۲) مشتق‌گیری ضمنی

ابتدا به معرفی تابع ضمنی می‌پردازیم. برای هر رابطه که برحسب x و y بیان شده باشد دو حالت وجود دارد.

الف) y به طور صریح برحسب x بیان شده است، مانند:

$$y = x + \sin x \quad , \quad y = e^{2x-1} \quad , \quad y = x^2 + 2x \quad , \quad y = \frac{x}{x+1}$$

این نوع رابطه‌ها تابع می‌باشند. گاهی به این نوع رابطه‌ها، **تابع صریح** نیز می‌گویند.

ب) y به طور صریح برحسب x بیان نشده است، مانند:

$$x^3 + y^3 = 6xy \quad , \quad Ln(x^2 + y) = 2xy \quad , \quad xy = 1 \quad , \quad x^2 + y^2 = 4$$

این نوع رابطه‌ها ممکن است تابع نباشند ولی می‌توان آنها را به صورت اجتماع چند تابع (تابع صریح) در نظر گرفت. این نوع رابطه‌ها را **تابع ضمنی** می‌گویند.

در میان توابع ضمنی فوق، رابطه $xy = 1$ را می‌توان به صورت تابع صریح $y = \frac{1}{x}$ نوشت؛ در حالی‌که $x^2 + y^2 = 4$ تابع صریح نمی‌باشد ولی می‌توان آن را به صورت اجتماع دو تابع صریح $y = \sqrt{4 - x^2}$ و $y = -\sqrt{4 - x^2}$ در نظر گرفت. البته محاسبه y به عنوان یک یا چند تابع صریح از x ، گاهی بسیار دشوار است، به همین دلیل محاسبه مشتق y نسبت به x در هر یک از توابع صریح تشکیل دهنده یک تابع ضمنی، کار دشواری می‌باشد. خوشبختانه روش‌هایی وجود دارد که بدون پیدا کردن توابع صریح، می‌توان مشتق y را برحسب x محاسبه کرد. با ارائه یک مثال فهم و پذیرش روش مشتق‌گیری از توابع ضمنی را هموار می‌کنیم.

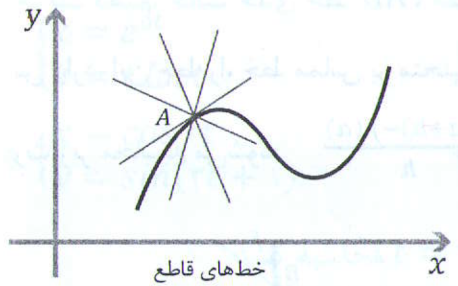
مثال ۴: تابع ضمنی $x^2 + y^2 = 4$ یک دایره به مرکز $(0,0)$ و شعاع ۲ می‌باشد. این دایره را می‌توان به صورت اجتماع دو تابع $y = \sqrt{4 - x^2}$ (نیم دایره بالای محور xها) و $y = -\sqrt{4 - x^2}$ (نیم دایره پایین محور xها) در نظر گرفت، سپس مشتق را محاسبه کرد.

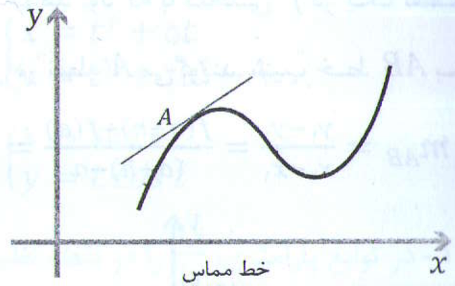
با حرکت نقطه B به سمت نقطه A ، مقدار h به سمت صفر میل می‌کند. بنابراین اگر شیب خط مماس در نقطه A را m بنامیم، داریم: $m = \lim\limits_{h \to ۰} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

در صورت وجود حد فوق، این مقدار، همان مشتق تابع f در $x = a$ یعنی $f'(a)$ می‌باشد. به عبارت دیگر شیب خط مماس بر یک منحنی در نقطه‌ای به طول $x = a$ برابر $f'(a)$ می‌باشد.

نکته : اگر برای تابع f مقدار $\lim\limits_{h \to ۰} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ برابر $+\infty$ یا $-\infty$ شود، آنگاه خط $x = a$ مماس بر منحنی می‌باشد.

تذکر: تعریف خط مماس، به عنوان خطی که منحنی را در یک نقطه قطع می‌کند نادرست می‌باشد. با این تعریف در یک نقطه، تعداد نامتناهی خط مماس بر منحنی می‌توان رسم کرد. با توجه به اینکه حد تابع در صورت وجود منحصر به فرد است، بنابراین خط مماس هم در صورت وجود تنها یکی می‌باشد. **لذا خط مماس را همان حالت حدی خط AB در حرکت نقطه B به سمت A باید در نظر گرفت.**



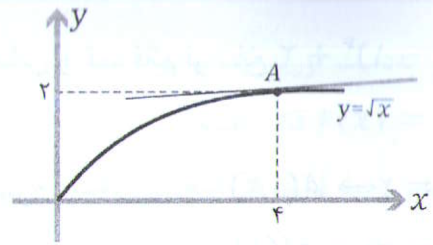


مثال ۱: معادله خط مماس بر تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در نقطه $x = ۴$ به‌دست آورید.

حل: نقطه تماس $x = ۴ \to y = f(۴) = \sqrt{۴} = ۲ \to A(۴,۲)$

شیب خط مماس $f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \to m = f'(۴) = \frac{۱}{۲\sqrt{۴}} = \frac{۱}{۴}$

معادله خط مماس $y - y_۱ = m(x - x_۱) \to y - ۲ = \frac{۱}{۴}(x - ۴) \to y = \frac{۱}{۴}x + ۱$



مثال ۲: معادله خط مماس بر تابع $f(x) = x + e^x$ را در نقطه $x = ۰$ بیابید.

حل: نقطه تماس $x = ۰ \to y = f(۰) = ۰ + e^۰ = ۱ \to A(۰,۱)$

شیب خط مماس $f'(x) = ۱ + e^x \to m = f'(۰) = ۱ + e^۰ = ۲$

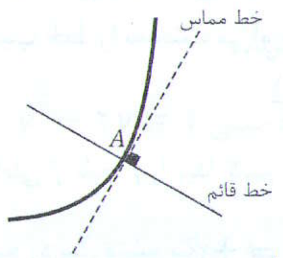
معادله خط مماس $y - y_۱ = m(x - x_۱) \to y - ۱ = ۲(x - ۰) \to y = ۲x + ۱$

مثال ۳: معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \sqrt[۳]{x}$ را در نقطه $x = ۰$ بیابید.

حل: تابع f در نقطه $x = ۰$ پیوسته است و داریم: $f'(x) = \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$. بنابراین $f'(۰)$ یک عدد حقیقی نیست ولی داریم: $\lim\limits_{h \to ۰} \frac{f(۰+h)-f(۰)}{h} = \lim\limits_{h \to ۰} \frac{\sqrt[۳]{h}}{h} = \lim\limits_{h \to ۰} \frac{۱}{\sqrt[۳]{h^۲}} = +\infty$

لذا خط $x = ۰$ خط مماس بر منحنی تابع f است (شکل خط مماس، شبیه شکل مثال ۵ است).

تعریف ۱: خطی که بر خط مماس بر یک منحنی در نقطه تماس عمود باشد، **خط قائم** بر منحنی در آن نقطه نامیده می‌شود.



یادآوری: هرگاه دو خط L و L' با شیب‌های m و m' بر هم عمود باشند به شرط آنکه این خط‌ها موازی محورهای مختصات نباشند، داریم: $m'm = -۱$ یا $m' = \frac{-۱}{m}$

مثال ۴: معادله خط قائم بر منحنی $f(x) = x^۲ + x + ۱$ را در نقطه $x = ۱$ بیابید.

حل: نقطه تماس $x = ۱ \to f(۱) = ۳ \to A(۱,۳)$

شیب خط قائم $f'(x) = ۲x + ۱ \to m = f'(۱) = ۳ \to m' = \frac{-۱}{m} = \frac{-۱}{۳}$

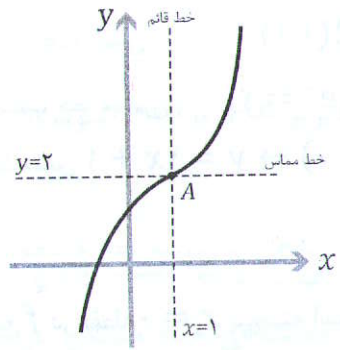
معادله خط قائم $y - y_۱ = m'(x - x_۱) \to y - ۳ = -\frac{۱}{۳}(x - ۱) \to y = -\frac{۱}{۳}x + \frac{۱۰}{۳}$

مثال ۵: معادله خط مماس و خط قائم بر تابع $f(x) = (x-۱)^۳ + ۲$ را در نقطه $x = ۱$ به‌دست آورید.

حل:

$x = ۱ \rightarrow y = f(۱) = ۲ \rightarrow A(۱,۲)$ نقطه تماس

$f'(x) = ۳(x-۱)^۲ \rightarrow m = f'(۱) = ۰$ شیب خط مماس



چون شیب خط مماس برابر صفر است پس خط مماس موازی محور xها و خط قائم موازی محور yها می‌باشد. از طرفی این دو خط از نقطه $(۱,۲)$ می‌گذرند. لذا خط‌های $y = ۲$ و $x = ۱$ به ترتیب خط‌های مماس و قائم خواهند بود.

مثال ۶: مختصات نقاطی از تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ را به‌دست آورید که خطوط مماس بر نمودار f در آن نقاط، با خط $L: ۴y + x = ۱$ موازی باشد.

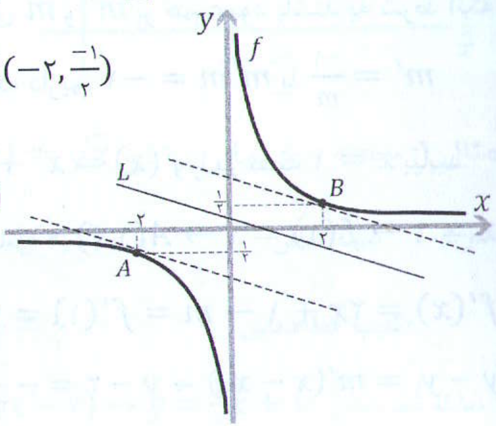
حل: ابتدا شیب خط را به‌دست می‌آوریم:

$$۴y + x = ۱ \rightarrow y = \frac{-۱}{۴}x + \frac{۱}{۴} \rightarrow m = \frac{-۱}{۴}$$

اکنون باید نقاطی از تابع f را پیدا کنیم که شیب خط مماس در آن نقاط برابر $(-\frac{۱}{۴})$ باشد.

$$f'(x) = \frac{-۱}{x^۲} \rightarrow \frac{-۱}{x^۲} = \frac{-۱}{۴} \rightarrow x^۲ = ۴ \rightarrow x = \pm ۲$$

$$\begin{cases} x = -۲ \rightarrow y = f(-۲) = \frac{۱}{-۲} \rightarrow A(-۲, \frac{-۱}{۲}) \\ \text{یا} \\ x = ۲ \rightarrow y = f(۲) = \frac{۱}{۲} \rightarrow B(۲, \frac{۱}{۲}) \end{cases}$$

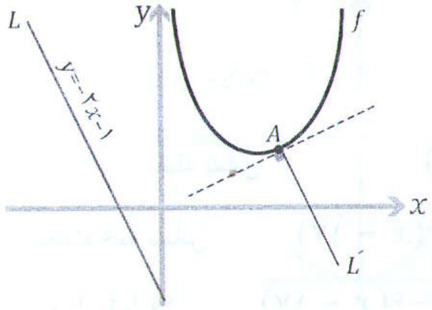


مثال ۷: معادله خط‌هایی را به‌دست آورید که موازی خط $L: y = -۲x - ۱$ بوده و بر منحنی $f(x) = x^۲ - ۲x + ۲$ قائم باشند.

حل: فرض کنیم A نقطه تماس خط قائم بر منحنی باشد. چون شیب خط L برابر $m = -۲$ است، پس برای شیب خط مماس در نقطه A داریم: $m' = \frac{-۱}{m} = \frac{-۱}{-۲} = \frac{۱}{۲}$

لذا به دنبال نقاطی هستیم که: $f'(x) = \frac{۱}{۲}$

$f'(x) = ۲x - ۲ = \frac{۱}{۲} \rightarrow x = \frac{۵}{۴}$, $y = f(\frac{۵}{۴}) = \frac{۱۷}{۱۶} \rightarrow A(\frac{۵}{۴}, \frac{۱۷}{۱۶})$ نقطه تماس



چون یک نقطه تماس به‌دست آمد، پس تنها یک معادله خط قائم داریم و آن به صورت زیر است:

$$L': y - \frac{۱۷}{۱۶} = -۲(x - \frac{۵}{۴})$$

تذکر: برای حل مثال‌های ۶ و ۷ رسم شکل واقعی ضرورتی ندارد ولی رسم یک شکل فرضی، کمک زیادی به درک و حل مسئله خواهد کرد.

مثال ۸: معادله خط مماس و خط قائم بر منحنی $x^۲ + y^۲ - ۲y = ۴$ را در نقطه $(-۱,۳)$ به‌دست آورید.

حل: معادله منحنی فوق یک تابع ضمنی است، پس به کمک مشتق‌گیری ضمنی ابتدا y' را به‌دست می‌آوریم:

$$x^۲ + y^۲ - ۲y = ۴ \rightarrow ۲x + ۲yy' - ۲y' = ۰ \rightarrow ۲y'(y-۱) + ۲x = ۰$$

$$y' = \frac{-x}{y-۱} \xrightarrow{(-۱,۳)} m = \frac{۱}{۳-۱} = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین شیب خط مماس $m = \frac{۱}{۲}$ و شیب خط قائم $m' = -۲$ است، لذا داریم:

$y - ۳ = \frac{۱}{۲}(x+۱) \rightarrow y = \frac{۱}{۲}x + \frac{۷}{۲}$ معادله خط مماس

$y - ۳ = -۲(x+۱) \rightarrow y = -۲x + ۱$ معادله خط قائم

۴-۷ توابع صعودی و نزولی، نقاط ماکزیمم و می‌نیمم، تقعر و نقطه عطف

۱) توابع صعودی و نزولی[1]

رابطه بین صعودی و نزولی بودن تابع و مشتق: فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر بر فاصله (a,b) و x و x_1 دو نقطه دلخواه این فاصله باشند. برحسب اینکه تابع f صعودی یا نزولی باشد، داریم[2]:

$$x < x_1 \xrightarrow{\text{صعودی}\, f} f(x) < f(x_1) \rightarrow \begin{cases} x - x_1 < 0 \\ f(x) - f(x_1) < 0 \end{cases} \rightarrow \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} > 0$$

$$\rightarrow \lim_{x\to x_1} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \geq 0 \rightarrow f'(x_1) \geq 0$$

$$x < x_1 \xrightarrow{\text{نزولی}\, f} f(x) > f(x_1) \rightarrow \begin{cases} x - x_1 < 0 \\ f(x) - f(x_1) > 0 \end{cases} \rightarrow \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < 0$$

$$\rightarrow \lim_{x\to x_1} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq 0 \rightarrow f'(x_1) \leq 0$$

مطالب فوق ارتباط بین یک تابع مشتق‌پذیر و صعودی یا نزولی بودن آن را نشان می‌دهد و لذا قضیه زیر را راحت‌تر می‌توانید بپذیرید. این قضیه، عکس مطالب فوق بوده و به کمک قضیه مقدار میانگین ثابت می‌شود.

قضیه ۱: اگر تابع f در فاصله (a,b) مشتق‌پذیر باشد و به ازای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم: الف) $f'(x) > 0$، آنگاه تابع f بر این فاصله صعودی است.

ب) $f'(x) < 0$، آنگاه تابع f بر این فاصله نزولی است.

۱- معمولاً هرگاه از لفظ صعودی یا نزولی استفاده می‌شود منظور نوع اکید آن می‌باشد و در این بخش هم، منظور همین است.

۲- در این توضیحات از این قضیه استفاده شده است: «اگر برای هر نقطه همسایگی محذوف x_1 داشته باشیم: $f(x) > 0$ آنگاه داریم: $\lim_{x\to x_1} f(x) \geq 0$ و اگر $f(x) < 0$ آنگاه داریم: $\lim_{x\to x_1} f(x) \leq 0$ »

نتیجه: برای تعیین صعودی یا نزولی بودن یک تابع مشتق‌پذیر، تابع مشتق اول را تعیین علامت می‌کنیم. در فاصله‌ای که مشتق اول مثبت است تابع صعودی و در فاصله‌ای که مشتق اول منفی است تابع نزولی می‌باشد.

مثال ۱: در زیر فاصله‌هایی که تابع بر آنها صعودی یا نزولی می‌باشد، مشخص شده است.

۱) $f(x) = -2x + 1 \rightarrow f'(x) = -2 < 0 \rightarrow$ تابع f بر $\mathbb{R}$ نزولی است

۲) $f(x) = x^3 + 2x + 1 \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2 > 0 \rightarrow$ تابع f بر $\mathbb{R}$ صعودی است

۳) $f(x) = \frac{x-2}{3-x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{(3-x)^2} > 0 \quad , \quad D_f = \mathbb{R} - \{3\}$

بنابراین تابع f بر فاصله‌های $(3,+\infty)$ و $(-\infty,3)$ صعودی می‌باشد.

۴) $g(x) = x^2 + 2x \rightarrow g'(x) = 2x + 2 \rightarrow 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$

عبارت $2x + 2$ برای $x < -1$ منفی و برای $x > -1$ مثبت می‌باشد، بنابراین تابع g بر فاصله $(-\infty,-1)$ نزولی و بر فاصله $(-1,+\infty)$ صعودی می‌باشد[1].

۵) $h(x) = x^3 - 3x + 2 \rightarrow h'(x) = 3x^2 - 3 \rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

با تعیین علامت عبارت $3x^2 - 3$ مشخص می‌شود که تابع h بر فاصله‌های $(-\infty,-1)$ و $(1,+\infty)$ صعودی و بر فاصله $(-1,1)$ نزولی است.

نکته: توضیحات مربوط به توابع g و h مثال فوق را برای اختصار با جدول‌هایی به صورت زیر نشان می‌دهیم و آنها را **جدول تغییرات تابع** می‌نامیم. در مباحث بعدی سطرهای دیگری به این جدول‌ها اضافه می‌کنیم[2].

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
h'		$+$	0	$-$	0	$+$	

۱- با توجه به اینکه تابع g در $x = -1$ پیوسته است، می‌توان گفت تابع بر فاصله $(-\infty,-1]$ نزولی و بر فاصله $[-1,+\infty)$ صعودی است.

۲- بعضی از مولفین این سطرها را به جای f'، f'' و f با $f'(x)$، $f''(x)$ و $f(x)$ نمایش می‌دهند.

۲) ماکزیمم و می‌نیمم

تعریف ۱: اگر تابع f روی مجموعه A تعریف شده باشد، هرگاه نقطه‌ای مانند $c \in A$ موجود باشد به طوری که برای هر $x \in A$ داشته باشیم: $f(x) \leq f(c)$، مقدار $f(c)$ را **ماکزیمم مطلق** تابع f در A می‌نامند.

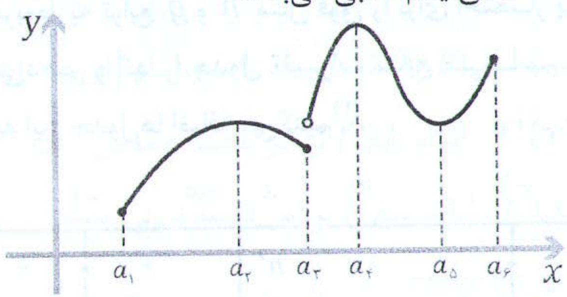
تعریف ۲: اگر تابع f روی مجموعه A تعریف شده باشد، هرگاه نقطه‌ای مانند $c \in A$ موجود باشد به طوری که برای هر $x \in A$ داشته باشیم: $f(x) \geq f(c)$، مقدار $f(c)$ را **می‌نیمم مطلق** تابع f در A می‌نامند.

تعریف ۳: تابع f دارای یک **ماکزیمم نسبی** در c است هرگاه فاصله بازی مانند I شامل c موجود باشد به طوری که برای هر $x \in I$ داشته باشیم: $f(x) \leq f(c)$

تعریف ۴: تابع f دارای یک **می‌نیمم نسبی** در c است هرگاه فاصله بازی مانند I شامل c موجود باشد به طوری که برای هر $x \in I$ داشته باشیم: $f(x) \geq f(c)$

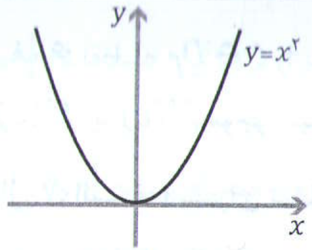
تعریف ۵: نقطه‌ای که ماکزیمم یا می‌نیمم باشد، نقطه **اکسترمم** می‌گویند.

مثال ۲: در زیر نمودار تابع g بر مجموعه $A = [a_۱, a_۶]$ را مشاهده می‌کنید. با توجه به تعریف‌های ماکزیمم و می‌نیمم مطلق و نسبی، تابع در $x = a_۴$ دارای ماکزیمم مطلق، در $x = a_۱$ می‌نیمم مطلق، در $x = a_۲$ و $x = a_۴$ ماکزیمم نسبی در $x = a_۳$ و $x = a_۵$ می‌نیمم نسبی می‌باشد.

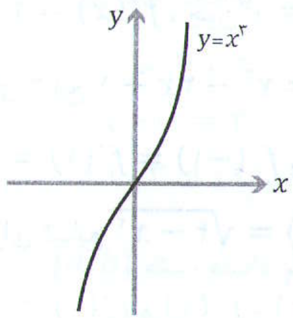


تذکر: در مثال فوق $x = a_۱$ می‌نیمم مطلق است ولی می‌نیمم نسبی نمی‌باشد. با توجه به تعریف نقاط اکسترمم مطلق و نسبی، نقاط اکسترمم مطلق می‌توانند نقاط انتهایی یک فاصله بسته هم باشند ولی نقاط اکسترمم نسبی از نقاط یک فاصله باز می‌باشند.

مثال ۳: تابع $f(x) = x^۲$ در نقطه $x = ۰$ دارای می‌نیمم نسبی و می‌نیمم مطلق است ولی دارای ماکزیمم نسبی و ماکزیمم مطلق نمی‌باشد.

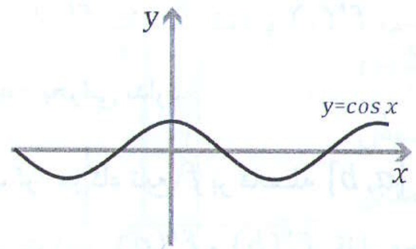


مثال ۴: تابع $f(x) = x^۳$ دارای هیچ ماکزیمم نسبی و می‌نیمم نسبی و مطلق نمی‌باشد.

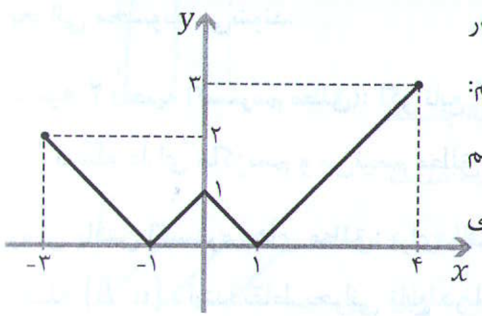


تذکر: مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم مطلق در صورت وجود منحصر به فرد می‌باشند، ولی ممکن است در نقاط متعددی تکرار شوند. در مثال‌های زیر این مطلب را مشاهده می‌کنید.

مثال ۵: تابع $f(x) = cos\,x$ دارای ماکزیمم نسبی و مطلق ۱ در نقاط $x = ۲k\pi$ و مقدار می‌نیمم نسبی و مطلق ۱- در نقاط $x = (۲k - ۱)\pi$ می‌باشد $(k \in \mathbb{Z})$.



مثال ۶: برای تابع $f(x) = \left||x| - ۱\right|$ در فاصله $[-۳,۴]$ با توجه به نمودار آن داریم: تابع در $x = ۱$ و $x = -۱$ دارای می‌نیمم نسبی و مطلق، در $x = ۰$ دارای ماکزیمم نسبی و در $x = ۴$ دارای ماکزیمم مطلق می‌باشد.



توجه: تحت شرایط خاص می‌توان اکسترمم‌های مطلق تابع را معرفی کرد، ولی قبل از بیان آن شرایط، به یک تعریف نیاز داریم.

تعریف ۶: نقطه $c \in D_f$ را یک **نقطه بحرانی** تابع f می‌نامند هرگاه $f'(c) = ۰$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

مثال ۷: الف) برای تابع $f(x) = ۲x - x^۲ + ۳$ داریم: $D_f = \mathbb{R}$ و $f'(x) = ۲ - ۲x$، چون $f'(۱) = ۰$ پس $x = ۱$ نقطه بحرانی تابع f است.

ب) برای تابع $f(x) = x^۳ - ۳x + ۱$ داریم: $D_f = \mathbb{R}$ و $f'(x) = ۳x^۲ - ۳$، چون $f'(-۱) = f'(۱) = ۰$ پس $x = ۱$ و $x = -۱$ نقاط بحرانی تابع f می‌باشند.

ج) برای تابع $f(x) = \sqrt{۴ - x^۲}$ داریم: $D_f = [-۲,۲]$ ، $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{۴-x^۲}}$

چون $f'(۰) = ۰$ و $f'(۲)$ و $f'(-۲)$ موجود نمی‌باشند، پس نقاط $x = -۲,۰,۲$ نقاط بحرانی تابع f می‌باشند.

د) برای تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ داریم: $D_f = \mathbb{R} - \{۰\}$ ، $f'(x) = -\frac{۱}{x^۲}$. در هیچ نقطه‌ای f' صفر نمی‌شود و $f'(۰)$ موجود نیست. اما چون $۰ \notin D_f$ ، پس تابع f هیچ نقطه بحرانی ندارد.

تذکر: هرگاه تابع f بر فاصله $[a,b]$ تعریف شده باشد، $f'(a)$ و $f'(b)$ موجود نیست زیرا $f'_-(a)$ و $f'_+(b)$ قابل محاسبه نمی‌باشند. بنابراین دو نقطه a و b همواره بحرانی محسوب می‌شوند.

قضیه ۲ (قضیه اکسترمم مطلق): اگر تابع f روی فاصله بسته $[a,b]$ پیوسته باشد در این فاصله دارای ماکزیمم و می‌نیمم مطلق خواهد بود.

روش یافتن اکسترمم‌های مطلق: برای یافتن اکسترمم‌های مطلق تابع پیوسته f روی فاصله $[a,b]$ ، ابتدا نقاط بحرانی تابع در این فاصله را پیدا کرده، سپس مقدار تابع را در نقاط بحرانی محاسبه و مقایسه می‌کنیم. بیشترین مقدار، ماکزیمم مطلق و کمترین مقدار، می‌نیمم مطلق است.

مثال ۸: اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = x^۳ - ۳x + ۱$ را در فاصله $[-۲,۰]$ در صورت وجود معرفی کنید.

حل: تابع f یک تابع چندجمله‌ای می‌باشد پس روی فاصله بسته $[-۲,۰]$ پیوسته می‌باشد، لذا شرایط قضیه اکسترمم مطلق فراهم است. بنابر محاسبات مثال (۷ب) نقاط بحرانی تابع f در فاصله $[-۲,۰]$ عبارتند از: ۰ ، ۱− ، ۲− و داریم:

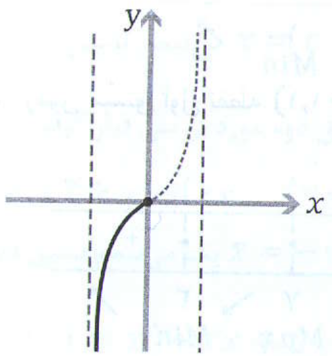
$$f(۰) = ۱ \ , \ f(-۱) = ۳ \ , \ f(-۲) = -۱$$

بنابراین ماکزیمم و می‌نیمم مطلق این تابع، به ترتیب عبارتند از: ۳ و ۱−

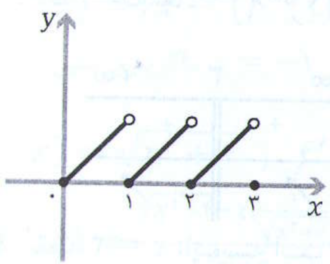
نکته: یکی از روش‌های **تعیین برد** یک تابع پیوسته بر فاصله بسته $[a,b]$ ، استفاده از قضیه اکسترمم مطلق می‌باشد. دراین حالت داریم: $R_f = [Min\,f \ , Max\,f]$

تذکر: اگر تابع پیوسته نباشد و یا فاصله بسته نباشد به روش قبل نمی‌توان اکسترمم‌های مطلق را پیدا کرد، در این حالت معمولاً از رسم شکل استفاده می‌کنیم.

مثال ۹: تابع $f(x) = tan\,x$ در فاصله $(-\frac{\pi}{۲}, ۰]$ شرایط قضیه اکسترمم مطلق را به علت بسته نبودن فاصله دارا نمی‌باشد. نمودار این تابع به صورت مقابل است. با توجه به نمودار، تابع دارای ماکزیمم مطلقی برابر صفر است و فاقد می‌نیمم مطلق می‌باشد.



مثال ۱۰: تابع $f(x) = x - [x]$ در فاصله بسته $[۰,۳]$ شرایط قضیه اکسترمم مطلق را به علت پیوسته نبودن f دارا نمی‌باشد. نمودار این تابع به صورت مقابل است. با توجه به نمودار، تابع دارای می‌نیمم مطلقی برابر صفر است و فاقد ماکزیمم مطلق است.



توجه: برای یافتن اکسترمم‌های نسبی یک تابع با شرایط خاص، قضیه‌های زیر مفید می‌باشند.

قضیه ۳ (قضیه آزمون مشتق اول): فرض کنید f بر (a,b) پیوسته و c یک نقطه بحرانی این فاصله باشد.

الف) اگر f' بر (a,c) مثبت و بر (c,b) منفی باشد، نقطه $x=c$ یک ماکزیمم نسبی است.

ب) اگر f' بر (a,c) منفی و بر (c,b) مثبت باشد، نقطه $x=c$ یک می‌نیمم نسبی است.

قضیه ۴: اگر تابع f بر (a,b) مشتق‌پذیر و در نقطه $c \in (a,b)$ دارای اکسترمم نسبی باشد، آنگاه $f'(c)=۰$.

نتیجه: برای تعیین اکسترمم‌های نسبی تابع f می‌توان از تعیین علامت $f'(x)$ کمک گرفت.

مثال ۱۱: اکسترمم‌های نسبی چند تابع در زیر به کمک آزمون مشتق اول، مورد بررسی قرار گرفته است.

۱) $f(x)=x^۲+۲x+۲$

$f'(x)=۲x+۲$

$۲x+۲=۰ \to x=-۱$

x	$-\infty$		-۱		$+\infty$
f'		$-$	۰	$+$	
f		$\searrow$	۱ Min	$\nearrow$	

بنابر آزمون مشتق اول نقطه $(-۱,۱)$ می‌نیمم نسبی می‌باشد.

۲) $f(x)=x^۳-۳x+۵$

$f'(x)=۳x^۲-۳$

$۳x^۲-۳=۰ \to x=\pm ۱$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
f'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
f		$\nearrow$	۷ Max	$\searrow$	۳ Min	$\nearrow$	

بنابر آزمون مشتق اول نقاط $(۱,۳)$ و $(-۱,۷)$ به ترتیب می‌نیمم و ماکزیمم نسبی می‌باشند.

۳) $f(x)=\frac{x-۱}{۳-x}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{۳\}$

$f'(x)=\frac{۲}{(۳-x)^۲}>۰$

x	$-\infty$		۳		$+\infty$
f'		$+$	‖	$+$	
f		$\nearrow$	‖	$\nearrow$	

تابع در نقطه $x=۳$ ناپیوسته است و در فاصله‌های $(۳,+\infty)$ و $(-\infty,۳)$ صعودی می‌باشد، لذا اکسترمم نسبی ندارد.

۴) $f(x)=|x|-۱$

$$f'(x)=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ \text{موجود نیست} & x=۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
f'		$-$	∄	$+$	
f		$\searrow$	-۱ Min	$\nearrow$	

بنابر آزمون مشتق اول تابع درنقطه $(۰,-۱)$ دارای می‌نیمم نسبی است.

۵) $f(x)=x^۳+۲$

$f'(x)=۳x^۲$

$۳x^۲=۰ \to x=۰$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
f'		$+$	۰	$+$	
f		$\nearrow$	۲	$\nearrow$	

در اطراف نقطه $x=۰$ مشتق تغییر علامت نداده است، پس تابع اکسترمم نسبی ندارد.

توجه: به کمک قضیه زیر بدون تعیین علامت $f'(x)$، می‌توان نوع اکسترمم‌های یک تابع را مشخص کرد. دلیل درستی این قضیه پس از تعریف تقعر یک منحنی مشخص می‌شود.

قضیه ۵ (قضیه آزمون مشتق دوم): اگر تابع f بر فاصله‌ای شامل نقطه c مشتق‌پذیر باشد،

الف) اگر $f'(c)=۰$ و $f''(c)<۰$ آنگاه تابع f در $x=c$ ماکزیمم نسبی دارد.

ب) اگر $f'(c)=۰$ و $f''(c)>۰$ آنگاه تابع f در $x=c$ می‌نیمم نسبی دارد.

مثال ۱۲: اکسترمم‌های نسبی توابع زیر به کمک آزمون مشتق دوم مورد بررسی قرار گرفته است.

۱) $f(x)=x^۲+۲x$ ، $f'(x)=۲x+۲=۰ \to x=-۱$ ، $f''(-۱)=۲$

چون $f''(-۱)>۰$ پس بنابر آزمون مشتق دوم تابع در $x=-۱$ یک می‌نیمم نسبی دارد.

۲) $f(x)=x^۳-۳x+۵$ ، $f'(x)=۳x^۲-۳=۰ \to x=\pm ۱$

$f''(x)=۶x \to (f''(۱)=۶>۰ \ , \ f''(-۱)=-۶<۰)$

بنابر آزمون مشتق دوم تابع در $x=۱$ می‌نیمم نسبی و در $x=-۱$ ماکزیمم نسبی دارد.

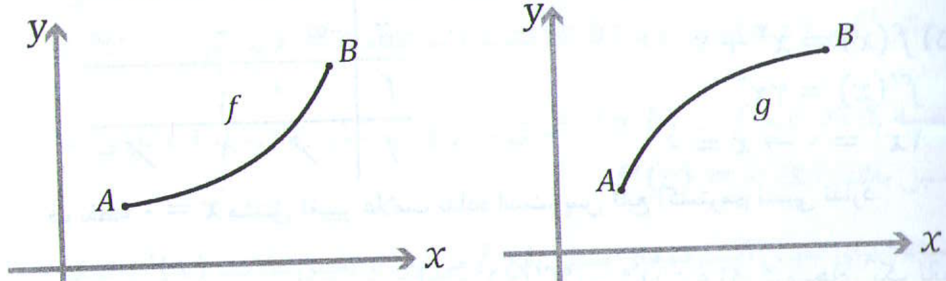
۳) $f(x)=\sqrt{x^۲+۴}$ ، $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^۲+۴}}=۰ \to x=۰$

$$f''(x)=\frac{\sqrt{x^۲+۴}-x\left(\frac{x}{\sqrt{x^۲+۴}}\right)}{x^۲+۴} \to f''(۰)=\frac{۲}{۴}>۰$$

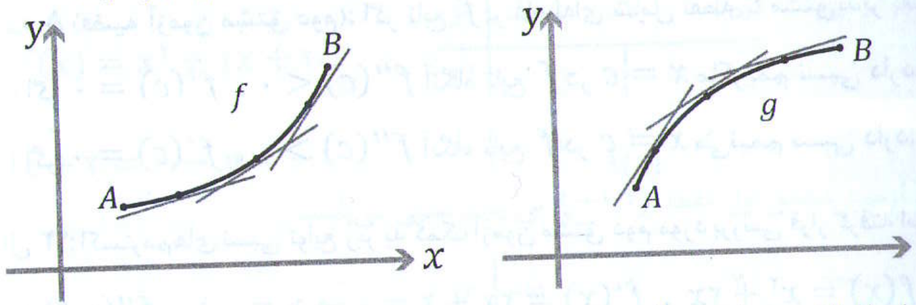
بنابر آزمون مشتق دوم تابع در $x=۰$ یک می‌نیمم نسبی دارد.

۳) تقعر و نقطه عطف

شکل‌های زیر دو تابع صعودی بر فاصله $[a,b]$ را نشان می‌دهد. هر دو نمودار نقاط A و B را به هم وصل می‌کنند، ولی این دو منحنی با یکدیگر متفاوت می‌باشند، زیرا انحنای آنها در جهت‌های مختلف می‌باشد. چگونه می‌توان این رفتار تابع را تشخیص داد؟



در شکل‌های زیر در نقاط مختلف دو تابع، مماس‌هایی رسم شده‌است. در تابع f، خطوط مماس زیر منحنی و در تابع g، خطوط مماس بالای منحنی قرار دارند.



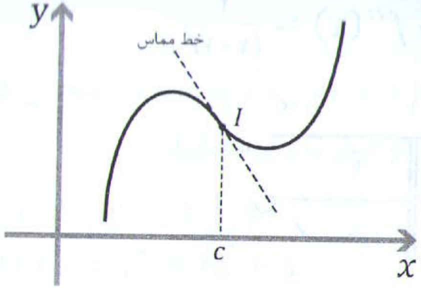
تعریف ۷: اگر نمودار تابع f در فاصله‌ای مانند I بالای تمام مماس‌هایش قرار گیرد، گوییم تقعر منحنی بر I به سمت بالا است و اگر زیر تمام مماس‌هایش قرار گیرد، گوییم تقعر منحنی بر I به سمت پایین است.

توجه: برای توابعی که مشتق دوم آنها موجود باشد به کمک قضیه زیر می‌توان جهت تقعر را تشخیص داد. این قضیه به کمک قضیه مقدار میانگین ثابت می‌شود.

قضیه ۶ (آزمون تقعر): فرض کنید تابع f بر فاصله I دارای مشتق دوم باشد، اگر برای هر $x \in I$ داشته باشیم: الف) $f''(x) > ۰$، آنگاه تقعر نمودار f بر I به سمت بالا است.

ب) $f''(x) < ۰$، آنگاه تقعر نمودار f بر I به سمت پایین است.

تعریف ۸: نقطه‌ای واقع بر یک منحنی را **نقطه عطف** می‌گویند هرگاه در این نقطه خط مماس موجود و جهت تقعر منحنی تغییر کند. نقطه عطف را معمولاً با I نمایش می‌دهند[1].



نتیجه: الف) اگر در اطراف نقطه‌ای، مشتق دوم تغییر علامت دهد و در این نقطه خط مماس موجود باشد این نقطه، نقطه عطف است.

ب) اگر در نقطه عطفی به طول c مشتق دوم موجود باشد، داریم: $f''(c) = ۰$

مثال ۱۳: جهت تقعر و نقطه عطف چند تابع در زیر مشخص شده است.

۱) $f(x) = ۲x - x^۲ \to f'(x) = ۲ - ۲x \to f''(x) = -۲ < ۰$

تقعر f بر $\mathbb{R}$ به سمت پایین است و تابع نقطه عطف ندارد.

۲) $f(x) = x^۳ + ۲x + ۱ \to f'(x) = ۳x^۲ + ۲$

$\to f''(x) = ۶x = ۰ \to x = ۰$

x	$-\infty$	۰	$+\infty$
f''	$-$	۰	$+$
f	$\frown$	I ۱	$\smile$

تابع در فاصله $(-\infty, ۰)$ تقعرش به سمت پایین و در فاصله $(۰, +\infty)$ تقعرش به سمت بالا است. چون $f'(۰) = ۲$ پس در $x = ۰$ خط مماس موجود است و لذا $(۰,۱)$ نقطه عطف منحنی f می‌باشد.

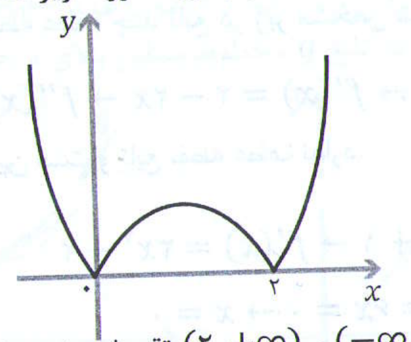
۱- بعضی از مفاهیم در طول تاریخ ریاضیات، دارای علامت یکسانی شده‌اند. یکی از این موارد نمایش فاصله به عنوان زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی و نقطه عطف می‌باشد که هر دو را معمولاً با I نمایش می‌دهند. این حرف از ابتدای کلمات *Interval* به معنی فاصله و *Inflection point* به معنی نقطه عطف گرفته شده است.

۳) $f(x) = \frac{x}{x-۱} \rightarrow f'(x) = \frac{-۱}{(x-۱)^۲} \rightarrow f''(x) = \frac{۲}{(x-۱)^۳}$

x	$-\infty$	۱	$+\infty$
f''	$-$	‖	$+$
f	$\frown$	‖	$\smile$

تابع در فاصله $(-\infty, ۱)$ تقعرش به سمت پایین و در فاصله $(۱, +\infty)$ تقعرش به سمت بالا است. در اطراف $x = ۱$ تقعر عوض می‌شود ولی چون $۱ \notin D_f$ ، پس در این نقطه خط مماس موجود نیست و لذا تابع نقطه عطف ندارد.

مثال ۱۴: نمودار تابع $f(x) = |x^۲ - ۲x|$ به صورت زیر است.



این تابع در فاصله‌های $(-\infty, ۰)$ و $(۲, +\infty)$ تقعرش به سمت بالا و در فاصله $(۰, ۲)$ تقعرش به سمت پایین است. در نقاط $x = ۰$ و $x = ۲$ تابع پیوسته و تقعر منحنی عوض می‌شود ولی چون در این نقاط مشتق اول موجود نیست لذا در این نقاط خط مماس نداریم. بنابراین طبق تعریف این دو نقطه را نمی‌توان نقطه عطف نامید.

توضیح برای مثال ۱۴: در نقاط $x = ۰, ۲$ مشتق چپ و راست موجود ولی نابرابرند ، پس در این نقاط مشتق موجود نیست.

$$f(x) = |x^۲ - ۲x| = \begin{cases} x^۲ - ۲x & x \le ۰ \text{ یا } ۲ \le x \\ -x^۲ + ۲x & ۰ < x < ۲ \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} ۲x - ۲ & x < ۰ \text{ یا } ۲ < x \\ -۲x + ۲ & ۰ < x < ۲ \end{cases} \rightarrow \left(\begin{cases} f'_-(۰) = -۲ \\ f'_+(۰) = ۲ \end{cases} \text{ و } \begin{cases} f'_+(۲) = ۲ \\ f'_-(۲) = -۲ \end{cases} \right)$$

تمرین

۱- برای توابع زیر: الف) فاصله‌هایی که تابع بر آنها صعودی یا نزولی است، مشخص کنید.
ب) نقاط اکسترمم نسبی را در صورت وجود بیابید.

۱) $f(x) = ۳ - x - x^۲$
۲) $f(x) = ۴x^۲ - ۴x + ۱$
۳) $f(x) = x^۳ + ۲x + ۵$
۴) $f(x) = ۳x^۲ - x^۳ - ۲$
۵) $f(x) = ۲x^۲ - x^۴$
۶) $f(x) = x^۴ + ۴x + ۱$
۷) $f(x) = \frac{x+۱}{۲x}$
۸) $f(x) = \frac{۲x}{۱-x}$
۹) $f(x) = \frac{۱}{x^۲+۱}$
۱۰) $f(x) = \frac{x}{x^۲+۱}$
۱۱) $f(x) = x\sqrt{۱ - x^۲}$
۱۲) $f(x) = x\sqrt{۶ - x}$
۱۳) $f(x) = \sqrt[۳]{x^۳ - ۲x^۲}$
۱۴) $f(x) = x^{\frac{۲}{۳}}$
۱۵) $f(x) = x + \cos x \,, ۰ \le x \le ۲\pi$
۱۶) $f(x) = x - ۲\sin x \,, ۰ \le x \le ۲\pi$
۱۷) $f(x) = x|x|$
۱۸) $f(x) = |x^۲ - ۱|$
۱۹) $f(x) = \frac{Ln\, x}{\sqrt{x}}$
۲۰) $f(x) = x^۲ e^x$

۲- برای توابع زیر: الف) نقاط بحرانی را مشخص کنید.
ب) مقادیر اکسترمم مطلق را در فاصله داده شده، در صورت وجود بیابید.

۱) $f(x) = x^۲ - ۲x + ۲ \;,\; [۰, ۳]$
۲) $f(x) = ۱ - ۲x - x^۲ \;,\; [-۴, ۱]$
۳) $f(x) = x^۳ - ۱۲x + ۱ \;,\; [-۳, ۵]$
۴) $f(x) = ۲x^۳ + ۳x^۲ + ۴ \;,\; [-۲, ۱]$
۵) $f(x) = x^۴ - ۲x^۲ + ۲ \;,\; [-۳, ۲]$
۶) $f(x) = ۳x^۵ - ۵x^۳ - ۱ \;,\; [-۲, ۲]$
۷) $f(x) = \frac{x-۱}{۲x-۱} \;,\; [۱, ۲]$
۸) $f(x) = \frac{x^۲+۱}{x} \;,\; [\frac{۱}{۲}, ۲]$
۹) $f(x) = |x - ۲| \;,\; [۰, ۳]$
۱۰) $f(x) = |x^۲ + x| \;,\; [-۲, ۱]$
۱۱) $f(x) = \sqrt{(x-۲)^۳} \;,\; [۱, ۱۰]$
۱۲) $f(x) = \sqrt{۹ - x^۲} \;,\; [-۱, ۲]$
۱۳) $f(x) = x - ۲\cos x \;,\; [-\pi, \pi]$
۱۴) $f(x) = \sin x + \cos x \;,\; [۰, \frac{\pi}{۲}]$
۱۵) $f(x) = \frac{Ln\, x}{x} \;,\; [۱, e^۲]$
۱۶) $f(x) = xe^{-x} \;,\; [۰, ۲]$

۳- در توابع زیر به کمک رسم نمودار، مقادیر اکسترمم مطلق و نقاط اکسترمم نسبی را در صورت وجود مشخص کنید.

۱) $f(x)=\begin{cases} 2x+2 & -1\le x<0 \\ x^2-x+2 & 0\le x<1 \\ -2x+4 & 1\le x\le 3 \end{cases}$ ۲) $f(x)=\begin{cases} Ln\,x & x\ge 1 \\ e^x & x<1 \end{cases}$

۴- برای توابع زیر فاصله‌هایی که تقعر منحنی به سمت بالا یا پایین است مشخص کنید، هم‌چنین نقاط عطف را در صورت وجود معرفی کنید.

۱) $f(x)=3x^2-5x+1$ ۲) $f(x)=(2x-1)^2+5$

۳) $f(x)=x^3-3x^2+1$ ۴) $f(x)=(x-1)^3+2x$

۵) $f(x)=x^4+4x-1$ ۶) $f(x)=x^4-2x^3$

۷) $f(x)=\frac{x+1}{2x-1}$ ۸) $f(x)=\frac{-1}{x}$

۹) $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ ۱۰) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

۱۱) $f(x)=\sqrt{x}$ ۱۲) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$

۱۳) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ۱۴) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

۱۵) $f(x)=|2x+x^2|$ ۱۶) $f(x)=x|x|$

۱۷) $f(x)=x+\cos x\ ,\ D_f=[0,2\pi]$ ۱۸) $f(x)=x+\sin x\ ,\ D_f=[0,2\pi]$

۱۹) $f(x)=x\,Ln\,x$ ۲۰) $f(x)=xe^x$

۵- مقادیر a و b را چنان بیابید که:

الف) برای تابع $f(x)=ax^3+bx^2$، نقطه $(1,2)$ نقطه عطف باشد.

ب) تابع $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ در $x=1$ اکسترمم نسبی و در $x=2$ نقطه عطف داشته باشد.

۴-۸ رسم نمودار تابع

نمودار یک تابع بیانگر مطالب بسیاری در مورد رفتار آن می‌باشد. با یک نگاه به آن، می‌توان اطلاعات فراوانی را در مورد ویژگی‌های تابع به‌دست آورد. یکی از اهداف درس ریاضیات عمومی، ارائهٔ روشی برای رسم منحنی‌ها با دقتی معقول می‌باشد. تاکنون اطلاعات فراوانی را در مورد رسم توابع به‌دست آورده‌ایم، اکنون وقت آن رسیده که این اطلاعات را کنار هم قرار داده و سپس اقدام به رسم نمودار تابع کنیم. فهرست اطلاعات قبل از رسم به صورت زیر می‌باشد.

۱- **تعیین دامنه تابع**: دامنه تابع محدوده رسم تابع را برای ما مشخص می‌کند.

۲- **بررسی زوج یا فرد بودن تابع**: اگر تابع f زوج باشد نمودار تابع نسبت به محور yها و اگر فرد باشد نسبت به مبدا مختصات قرینه است. دانستن این مطلب باعث می‌شود شکل را با دقت بیشتری رسم کنیم، ضمن اینکه می‌توانیم فقط نیمی از جدول تغییرات را تکمیل کنیم.

۳- **بررسی دوره تناوب**: اگر تابع f متناوب با دوره اصلی T باشد نمودار تابع را در فاصله‌ای به طول T رسم می‌کنیم؛ آنگاه برای رسم کامل نمودار، شکل را در فاصله‌های مشابه تکرار می‌کنیم.

۴- **مشخص کردن مجانب‌ها**: مجانب‌های افقی رفتار تابع را برای مقادیر بسیار بزرگ یا بسیار کوچک و مجانب‌های قائم رفتار تابع را در اطراف بعضی از نقاطی که در دامنه تابع نمی‌باشند، مشخص می‌کنند. بعضی از توابع دارای مجانب دیگری به نام مجانب مایل نیز می‌باشند که ما در این کتاب به آن نپرداخته‌ایم.

۵- **فاصله‌های صعود یا نزول**: فاصله‌هایی که بر آنها مشتق اول مثبت باشد، تابع صعودی و فاصله‌هایی که بر آنها مشتق اول منفی باشد، تابع نزولی است.

۶- **مقادیر اکسترمم نسبی**: برای یک تابع پیوسته هنگام محاسبه مشتق، نقاطی را که مشتق موجود نیست یا مشتق برابر صفر است را مشخص می‌کنیم، اگر در اطراف این نقاط مشتق تغییر علامت دهد این نقاط اکسترمم نسبی می‌باشند.

۷- تقعر و نقطه عطف: در فاصله‌هایی که مشتق دوم مثبت باشد تقعر به سمت بالا و فاصله‌هایی که مشتق دوم منفی باشد تقعر به سمت پایین است. نقاطی که خط مماس در آنها موجود و در اطراف آن نقاط مشتق دوم تغییر علامت می‌دهد نقاط عطف منحنی می‌باشند. گاهی محاسبه مشتق دوم دشوار و طولانی است، لذا خود را گرفتار آن نمی‌کنیم و سعی می‌کنیم با سایر اطلاعات منحنی را رسم کنیم. ضمن رسم، تقعرهای منحنی معمولاً مشخص می‌شوند.

۸- تعیین جدول تغییرات: اطلاعات مربوط به دامنه، مجانب‌ها، مشتق اول و مشتق دوم، نقاط اکسترمم نسبی و عطف را مرتب کرده در جدولی قرار می‌دهیم، و آن را جدول تغییرات تابع می‌گوییم.

۹- تعیین نقاط کمکی: برای رسم دقیق‌تر نمودار تابع می‌توان چند نقطه دیگر به جدول اضافه کرد، آنها را نقاط کمکی تابع می‌گویند. در بسیاری توابع، نقاطی که طول یا عرض آنها صفر است، نقاط کمکی مناسبی می‌توانند باشند.

۱۰- رسم منحنی: با استفاده از اطلاعات فوق نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

مثال ۱: نمودار تابع $f(x) = x^۲ - ۴x + ۲$ را رسم کنید.

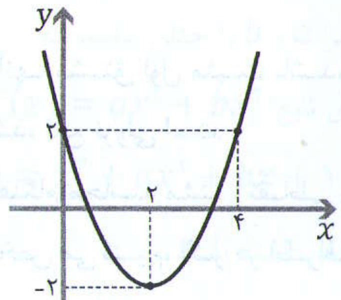
حل: $D_f = \mathbb{R} \quad , \quad f'(x) = ۲x - ۴ = ۰ \rightarrow x = ۲$

$f''(x) = ۲ > ۰$ (تقعر به سمت بالا)

$\underset{x \to \pm\infty}{Lim} f(x) = \underset{x \to \pm\infty}{Lim} x^۲ = +\infty$

$f(۰) = ۲ \;, \; f(۴) = ۲$ نقاط کمکی

x	$-\infty$		۰		۲		۴		$+\infty$
f'			−		۰		+		
f''			+				+		
f	$+\infty$	↘	۲	↘	−۲ (Min)	↗	۲	↗	$+\infty$



نکته: نمودار هر تابع چندجمله‌ای درجه دوم به صورت $f(x) = ax^۲ + bx + c$ یک سهمی می‌باشد. طول رأس سهمی $x = \frac{-b}{۲a}$ است، زیرا:

$f'(x) = ۲ax + b = ۰ \rightarrow x = -\frac{b}{۲a}$

و چون $f''(x) = ۲a$، اگر $a > ۰$ تقعر سهمی به سمت بالا و اگر $a < ۰$ تقعر سهمی به سمت پایین است. بنابراین:

«سهمی را به کمک رأس و دو نقطه کمکی در دو طرف رأس می‌توان رسم کرد.»

مطالب فوق تأییدی برای روش رسم سهمی، در کتاب ریاضیات مقدماتی می‌باشد.

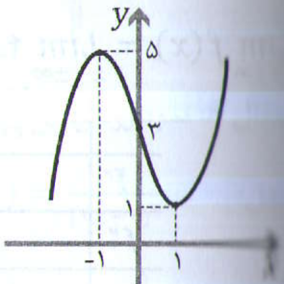
مثال ۲: نمودار تابع $f(x) = x^۳ - ۳x + ۳$ را به صورت زیر می‌توان رسم کرد.

$D_f = \mathbb{R} \;, \; f'(x) = ۳x^۲ - ۳ = ۰ \rightarrow x = \pm ۱ \;, \; f''(x) = ۶x = ۰ \rightarrow x = ۰$

$\underset{x \to +\infty}{Lim} f(x) = \underset{x \to +\infty}{Lim} x^۳ = +\infty \quad , \quad \underset{x \to -\infty}{Lim} f(x) = \underset{x \to -\infty}{Lim} x^۳ = -\infty$

$f(-۲) = ۱ \;, \; f(۲) = ۵$ نقاط کمکی

x	$-\infty$		−۲		−۱		۰		۱		۲		$+\infty$
f'			+		۰	−		−	۰		+		
f''			−			−	۰	+			+		
f	$-\infty$	↗	۱	↗	۵ (Max)	↘	۳ (I)	↘	۱ (Min)	↗	۵	↗	$+\infty$



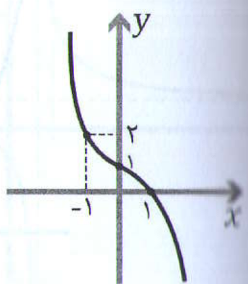
مثال ۳: نمودار تابع $f(x) = ۱ - x^۳$ را به صورت زیر می‌توان رسم کرد.

$D_f = \mathbb{R} \;, \; f'(x) = -۳x^۲ = ۰ \rightarrow x = ۰ \;, \; f''(x) = -۶x = ۰ \rightarrow x = ۰$

$\underset{x \to -\infty}{Lim} f(x) = \underset{x \to -\infty}{Lim} -x^۳ = +\infty \quad , \quad \underset{x \to +\infty}{Lim} f(x) = \underset{x \to +\infty}{Lim} -x^۳ = -\infty$

$f(-۱) = ۲ \;, \; f(۱) = ۰$ نقاط کمکی

x	$-\infty$		−۱		۰		۱		$+\infty$
f'			−		۰		−		
f''			+		۰		−		
f	$+\infty$	↘	۲	↘	۱ (I)	↘	۰	↘	$-\infty$



نکته: در نمودار تابع چندجمله‌ای درجه سوم $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ نکات زیر وجود دارد:

۱- در معادله $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ اگر $\Delta > 0$ تابع دارای دو نقطه اکسترمم نسبی و اگر $\Delta \leq 0$ تابع فاقد نقطه اکسترمم نسبی است.

۲- این تابع دارای نقطه عطفی به طول $x = \frac{-b}{3a}$ می‌باشد، زیرا:

$$f''(x) = 6ax + 2b = 0 \to x = -\frac{b}{3a}$$

۳- نقطه عطف منحنی، مرکز تقارن آن است.

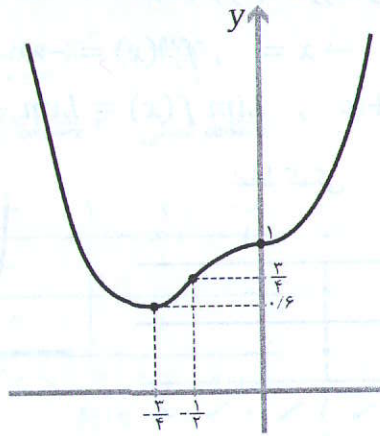
مثال ۴: نمودار تابع $f(x) = 4x^4 + 4x^3 + 1$ را به صورت زیر می‌توان رسم کرد.

$$D_f = \mathbb{R} \ , \ f'(x) = 16x^3 + 12x^2 = 4x^2(4x+3) = 0 \to x = 0 , \frac{-3}{4}$$

$$f''(x) = 48x^2 + 24x = 24x(2x+1) = 0 \to x = \frac{-1}{2} , x = 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 4x^4 = +\infty$$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$		$+$	0	$+$	
f''		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{37}{64}$	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
			Min		I		I		



مثال ۵: نمودار تابع $f(x) = \frac{-1}{x}$ را رسم کنید.

حل: دامنه تابع مجموعه $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ می‌باشد و تابع f فرد است. هم‌چنین داریم:

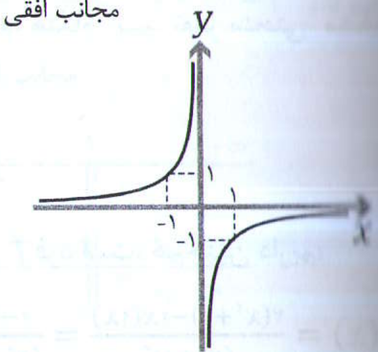
$$f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \ , \ f''(x) = \frac{-2}{x^3}$$

$$(\lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{x} = -\infty \ , \ \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty) \to x = 0$$ مجانب قائم

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-1}{x} = 0 \to y = 0$$ مجانب افقی

$$f(-1) = 1 \ , \ f(1) = -1$$ نقاط کمکی

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$+$		$+$	‖	$+$		$+$	
f''		$+$		$+$	‖	$-$		$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0



مثال ۶: نمودار تابع $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$ را رسم کنید.

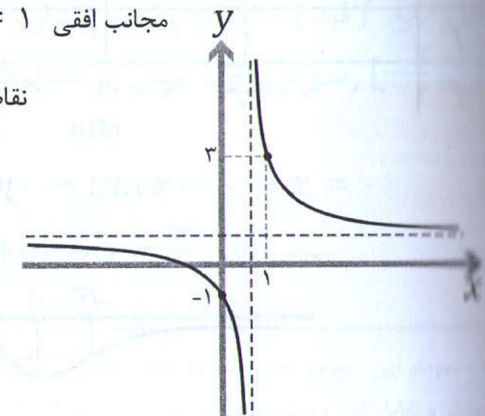
حل: $D_f = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\} \ , \ f'(x) = \frac{-4}{(2x-1)^2} < 0 \ , \ f''(x) = \frac{16}{(2x-1)^3}$

$$(\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{2x+1}{2x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty \ , \ \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{2x+1}{2x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty) \to x = \frac{1}{2}$$ مجانب قائم

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+1}{2x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{2x} = 1 \to y = 1$$ مجانب افقی

$$f(0) = -1 \ , \ f(1) = 3$$ نقاط کمکی

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
f'		$-$		$-$	‖	$-$		$-$	
f''		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
f	1	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3	$\searrow$	1



نکته: در نمودار تابع چندجمله‌ای درجه سوم $f(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ نکات زیر وجود دارد:

۱- در معادله $f'(x) = ۳ax^۲ + ۲bx + c = ۰$ اگر $\Delta > ۰$ تابع دارای دو نقطه اکسترمم نسبی و اگر $\Delta \leq ۰$ تابع فاقد نقطه اکسترمم نسبی است.

۲- این تابع دارای نقطه عطفی به طول $x = \frac{-b}{۳a}$ می‌باشد، زیرا:

$$f''(x) = ۶ax + ۲b = ۰ \rightarrow x = -\frac{b}{۳a}$$

۳- نقطه عطف منحنی، مرکز تقارن آن است.

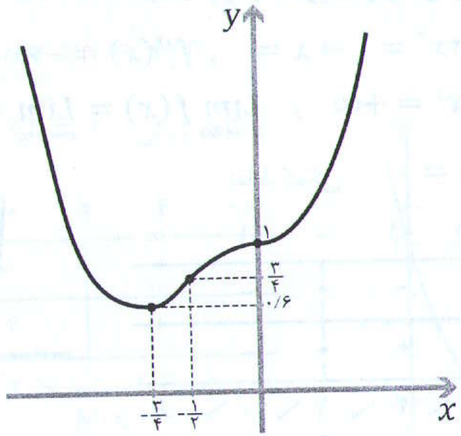
مثال ۴: نمودار تابع $f(x) = ۴x^۴ + ۴x^۳ + ۱$ را به صورت زیر می‌توان رسم کرد.

$$D_f = \mathbb{R} \;,\; f'(x) = ۱۶x^۳ + ۱۲x^۲ = ۴x^۲(۴x + ۳) = ۰ \rightarrow x = ۰ , \frac{-۳}{۴}$$

$$f''(x) = ۴۸x^۲ + ۲۴x = ۲۴x(۲x + ۱) = ۰ \rightarrow x = \frac{-۱}{۲} , x = ۰$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} ۴x^۴ = +\infty$$

x	$-\infty$		$-\frac{۳}{۴}$		$-\frac{۱}{۲}$		۰		$+\infty$
f'		$-$	۰	$+$		$+$	۰	$+$	
f''		$+$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{۳۷}{۶۴}$ Min	$\nearrow$	$\frac{۳}{۴}$ I	$\nearrow$	۱ I	$\nearrow$	$+\infty$



مثال ۵: نمودار تابع $f(x) = \frac{-۱}{x}$ را رسم کنید.

حل: دامنه تابع مجموعه $D_f = \mathbb{R} - \{۰\}$ می‌باشد و تابع f فرد است. هم‌چنین داریم:

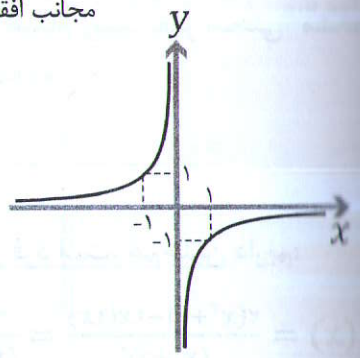
$$f'(x) = \frac{۱}{x^۲} > ۰ \;,\; f''(x) = \frac{-۲}{x^۳}$$

$$(\lim_{x \to ۰^+} \frac{-۱}{x} = -\infty \;,\; \lim_{x \to ۰^-} \frac{-۱}{x} = +\infty) \rightarrow x = ۰$$ مجانب قائم

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-۱}{x} = ۰ \rightarrow y = ۰$$ مجانب افقی

$f(-۱) = ۱ \;,\; f(۱) = -۱$ نقاط کمکی

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
f'		$+$		$+$	‖	$+$		$+$	
f''		$+$		$+$	‖	$-$		$-$	
f	۰	$\nearrow$	۱	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-۱	$\nearrow$	۰



مثال ۶: نمودار تابع $f(x) = \frac{۲x+۱}{۲x-۱}$ را رسم کنید.

حل:

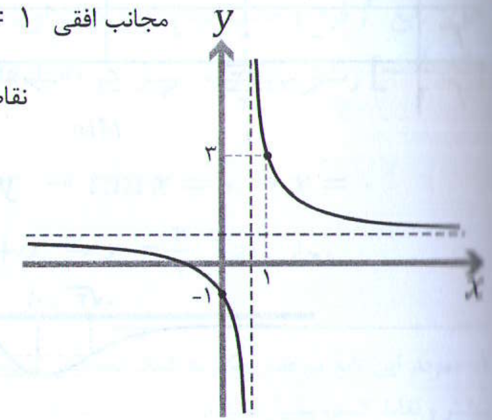
$$D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{۱}{۲}\right\} \;,\; f'(x) = \frac{-۴}{(۲x-۱)^۲} < ۰ \;,\; f''(x) = \frac{۱۶}{(۲x-۱)^۳}$$

$$(\lim_{x \to \frac{۱}{۲}^+} \frac{۲x+۱}{۲x-۱} = \frac{۲}{۰^+} = +\infty \;,\; \lim_{x \to \frac{۱}{۲}^-} \frac{۲x+۱}{۲x-۱} = \frac{۲}{۰^-} = -\infty) \rightarrow x = \frac{۱}{۲}$$ مجانب قائم

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{۲x+۱}{۲x-۱} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{۲x}{۲x} = ۱ \rightarrow y = ۱$$ مجانب افقی

$f(۰) = -۱ \;,\; f(۱) = ۳$ نقاط کمکی

x	$-\infty$		۰		$\frac{۱}{۲}$		۱		$+\infty$
f'		$-$		$-$	‖	$-$		$-$	
f''		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
f	۱	$\searrow$	-۱	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	۳	$\searrow$	۱



نکته: هر تابع به صورت $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ که $c \neq 0$ و $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$، **تابع هموگرافیک** نامیده می‌شود. این تابع دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد:

۱- خط $x = \frac{-d}{c}$ مجانب قائم تابع است. ۲- خط $y = \frac{a}{c}$ مجانب افقی تابع است.

۳- محل برخورد مجانب‌ها یعنی نقطه $(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$، مرکز تقارن تابع است.

۴- خط‌های $y = x + \frac{a+d}{c}$ و $y = -x + \frac{a-d}{c}$ محورهای تقارن تابع می‌باشند.

۵- در توابع هموگرافیک بدون محاسبه مشتق دوم، هنگام رسم، تقعر منحنی مشخص می‌شود، لذا می‌توان مشتق دوم را محاسبه نکرد.

مثال ۷: نمودار تابع $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ را رسم کنید.

حل: دامنه تابع مجموعه $D_f = \mathbb{R}$ می‌باشد و تابع f فرد است، هم‌چنین داریم:

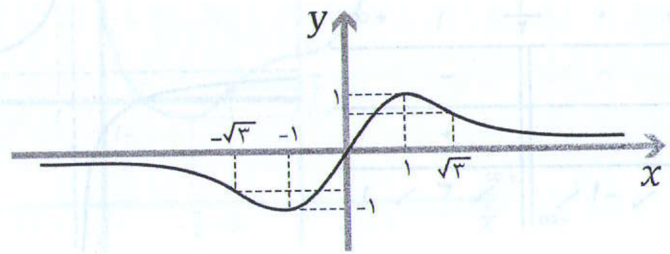
$$f'(x) = \frac{2(x^2+1)-2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \to 2 - 2x^2 = 0 \to x = \pm 1$$

$$f''(x) = \frac{-4x(3-x^2)}{(x^2+1)^3} = 0 \to -4x(3-x^2) = 0 \to x = 0, \pm\sqrt{3}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x} = 0 \to y = 0$$ مجانب افقی

چون مخرج این تابع گویا در هیچ نقطه‌ای صفر نمی‌شود لذا تابع مجانب قائم ندارد.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f'		$-$		$-$	$\bullet$	$+$		$+$	$\bullet$	$-$		$-$	
f''		$-$	$\bullet$	$+$		$+$	$\bullet$	$-$		$-$	$\bullet$	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ I	$\searrow$	-1 Min	$\nearrow$	0 I	$\nearrow$	1 Max	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ I	$\searrow$	0



مثال ۸: نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ را رسم کنید.

حل: تابع f فرد است و داریم: $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$, $f'(x) = \frac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2} < 0$

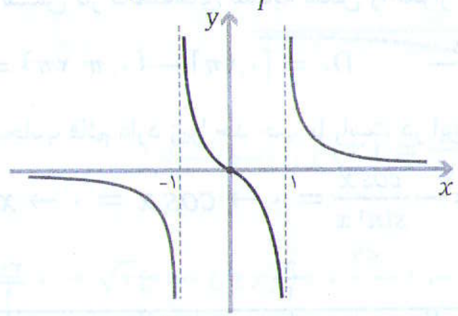
$$f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0 \to 2x(x^2+3) = 0 \to x = 0$$

$$(\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \ , \ \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty) \to x = 1$$ مجانب قائم

$$(\lim_{x\to -1^+} \frac{x}{x^2-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \ , \ \lim_{x\to -1^-} \frac{x}{x^2-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty) \to x = -1$$ مجانب قائم

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \to y = 0$$ مجانب افقی

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$-$	‖	$-$		$-$	‖	$-$	
f''		$-$	‖	$+$	$\bullet$	$-$	‖	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0 I	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0



مثال ۹: نمودار $f(x) = tan\, x$ را رسم کنید.[1]

حل: تابع f فرد و متناوب با دوره تناوب اصلی $T = \pi$ است. نمودار را در فاصله $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ رسم می‌کنیم، سپس در فاصله‌های مشابه شکل را تکرار می‌کنیم.

$$f'(x) = (1 + tan^2 x) > 0$$

$$f''(x) = 2\, tan\, x\ (1 + tan^2 x) = 0 \to tan\, x = 0 \to x = 0$$

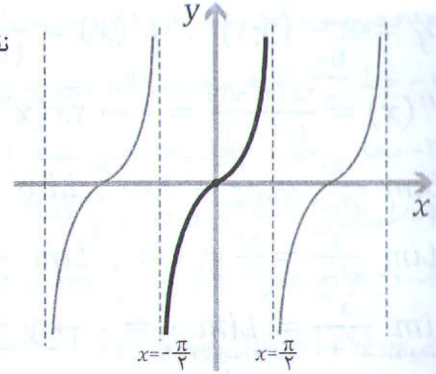
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} tan\, x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{sin\, x}{cos\, x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \to x = \frac{\pi}{2}$$ مجانب قائم

۱- نمودار این تابع در فصل یکم به کمک نقطه‌یابی و توضیحات فراوان رسم شد. ولی در این مثال با اطلاعات بیشتر و نقاط کمتر، بسیار دقیق‌تر نمودار را رسم کرده‌ایم.

$\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{۲}^+} \tan x = \lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{۲}^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{۱}{۰^-} = -\infty \to x = -\frac{\pi}{۲}$ مجانب قائم

$f(-\frac{\pi}{۴}) = -۱ \ , \ f(\frac{\pi}{۴}) - ۱$ نقاط کمکی

x	$-\frac{\pi}{۲}$		$-\frac{\pi}{۴}$		۰		$\frac{\pi}{۴}$		$\frac{\pi}{۲}$
f'			+		⋮		+		
f''			-		⋮		+		
f	$-\infty$	↗	-۱	↗	۰	↗	۱	↗	$+\infty$
					I				



مثال ۱۰: نمودار تابع $f(x) = \csc x$ را رسم کنید.

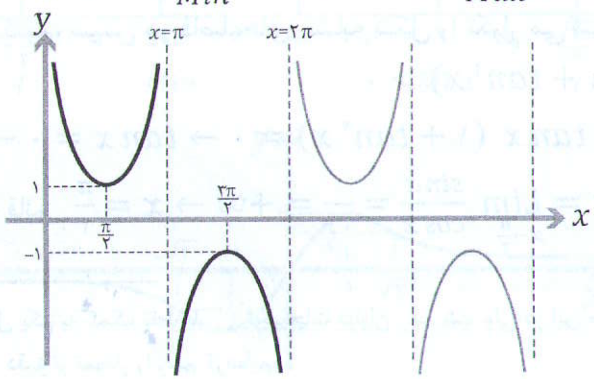
حل: این تابع متناوب با دوره تناوب اصلی $T = ۲\pi$ است. نمودار تابع را در فاصله $[۰,۲\pi]$ رسم می‌کنیم، سپس در فاصله‌های مشابه شکل را تکرار می‌کنیم.

$f(x) = \csc x = \frac{۱}{\sin x} \quad , \quad D_f = [۰,۲\pi] - \{۰,\pi,۲\pi\} = (۰,\pi) \cup (\pi,۲\pi)$

تابع در $x = ۰, \pi, ۲\pi$ مجانب قائم دارد زیرا حد چپ یا راست در این نقاط نامتناهی می‌شود.

$f'(x) = \frac{۰ - \cos x}{\sin^۲ x} = -\frac{\cos x}{\sin^۲ x} = ۰ \to \cos x = ۰ \to x = \frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}$

x	۰		$\frac{\pi}{۲}$		π		$\frac{۳\pi}{۲}$		۲π
f'	‖	-	⋮	+	‖	+	⋮	-	‖
f	‖ $+\infty$	↘	۱	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-۱	↘	$-\infty$ ‖
			Min				Max		



مثال ۱۱: نمودار تابع $f(x) = xe^x$ را رسم کنید.

حل: $D_f = \mathbb{R} \ , \ f'(x) = e^x(۱ + x) = ۰ \xrightarrow{e^x \neq ۰} x = -۱$

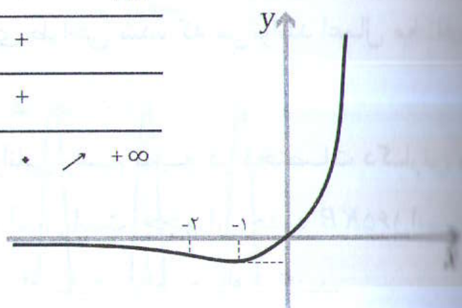
$f''(x) = e^x(۲ + x) = ۰ \xrightarrow{e^x \neq ۰} x = -۲ \quad , \quad \lim\limits_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$

در حد زیر پس از رفع ابهام به کمک قاعده هوپیتال داریم:

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{۱}{-e^{-x}} = ۰ \to y = ۰$ مجانب افقی

$f(-۲) = -۲e^{-۲} = -۰/۲۷ \ , \ f(-۱) = -e^{-۱} = -۰/۳۷ \ , \ f(۰) = ۰$ نقطه کمکی

x	$-\infty$		-۲		-۱		۰		$+\infty$
f'		-		-	⋮	+			
f''		-	⋮	+		+			
f	۰	↘	$-۲e^{-۲}$	↘	$-e^{-۱}$	↗	۰	↗	$+\infty$
			I		Min				



مثال ۱۲: نمودار تابع $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ را رسم کنید.

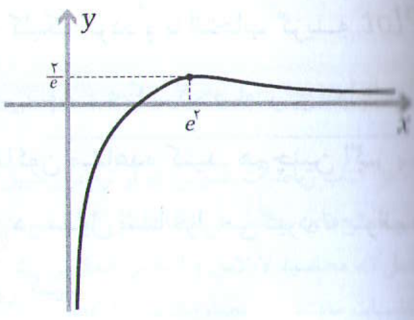
حل: $D_f = (۰, +\infty)$

$f'(x) = \frac{\sqrt{x}(۲ - \ln x)}{۲x^۲} = ۰ \to \sqrt{x}(۲ - \ln x) = ۰ \xrightarrow{x > ۰} ۲ - \ln x = ۰ \to x = e^۲$

$\lim\limits_{x \to ۰^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to ۰^+} \frac{۱}{\sqrt{x}} \ln x = (+\infty)(-\infty) = -\infty \to x = ۰$ مجانب قائم

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{۱}{x}}{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{۲\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{۲}{\sqrt{x}} = ۰ \to y = ۰$ مجانب افقی

x	۰		$e^۲$		$+\infty$
f'		+	⋮	-	
f	$-\infty$	↗	$\frac{۲}{e}$	↘	۰
			Max		



رسم نمودار توابع با نرم‌افزارهای ریاضی:

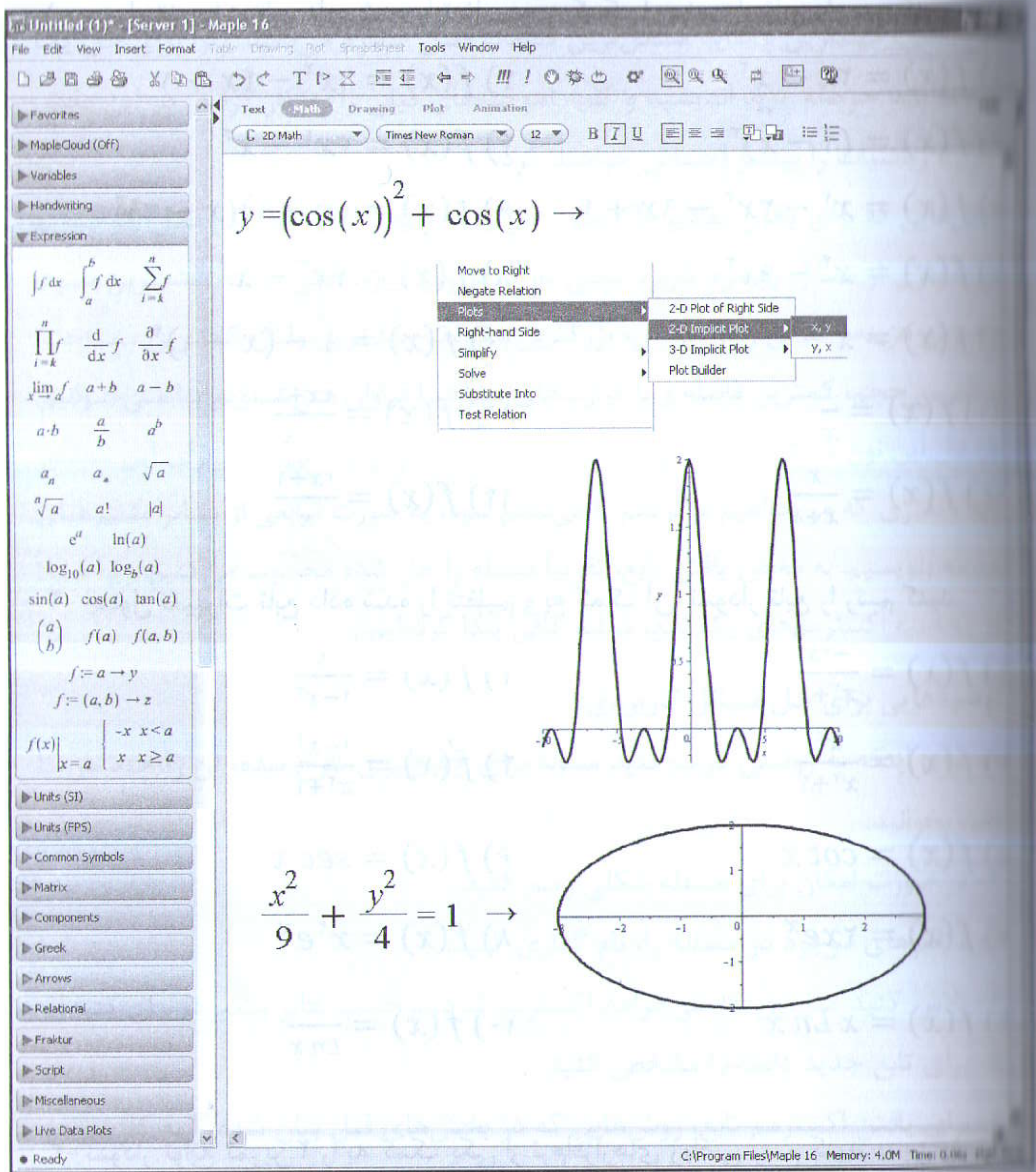
پیشرفت علم و تولید نرم‌افزارهای مختلف باعث شده آموزش و درک بسیاری از مفاهیم ریاضی، اعمال سنگین ریاضی و محاسبات خسته کننده به سادگی امکان پذیر باشد. استفاده از این نرم‌افزارها زمانی می‌تواند مفید باشد که از مفاهیم اولیه آگاهی کامل داشته باشیم و بتوانیم اعمال مقدماتی و مثال‌های ساده هر مبحث را به راحتی انجام دهیم. در چنین حالتی باید مسئله‌های پیچیده‌تر و اعمال سنگین‌تر را به این نرم‌افزارها واگذار کرد و انرژی و وقت خود را برای تفکر و پیشبرد بیشتر دانش خود و جامعه صرف نمود. نرم‌افزارهای ریاضی متعددی طراحی شده که می‌توانند اعمال مختلف ریاضی را انجام دهند. در اینجا دو مورد را معرفی می‌کنیم.

۱- نرم‌افزار $Wingraph$: این نرم‌افزار فقط توانایی رسم توابع در مختصات دکارتی و مختصات قطبی را دارد و کار با آن فوق العاده آسان است. حجم آن حدود ۱۶۵KB است و نیازی به نصب ندارد. این نرم‌افزار را می‌توانید از سایت مؤلف دریافت کنید.

۲- نرم‌افزار $Maple$: این نرم‌افزار یکی از توانمندترین نرم‌افزارهای ریاضی می‌باشد و به دلیل توانایی انجام اعمال مختلف ریاضی، سادگی کار با آن و محیط جذابش، از محبوبیت زیادی برخوردار است. برای اینکه از امکانات و نحوه کار با این نرم‌افزار آشنا شوید باید به قسمت $Help$ آن یا کتاب‌هایی که در این زمینه نوشته شده است مراجعه کنید.

در این نرم‌افزار برای رسم منحنی یک تابع صریح یا ضمنی کافی است ابتدا معادله آن را بنویسید. سپس بر روی عبارت نوشته شده، راست کلیک کرده و با انتخاب گزینه $Plot$ و سپس $2\text{-}D\ Implicit\ Plot$ نمودار رسم می‌شود. به کمک ماوس و نوار ابزار بالای صفحه می‌توانید نمودار را به صورت‌های گوناگون مشاهده کنید. هم‌چنین اگر بر روی تصویر راست کلیک کنید گزینه‌های بیشتری در مقابل شما قرار می‌گیرد تا بتوانید منحنی را در حالت‌های گوناگون مشاهده و بررسی کنید.

در شکل زیر محیط نرم‌افزار میپل همراه با اجرای دو دستور را مشاهده می‌کنید.[1]



۱- در کتاب ریاضیات عمومی دو از نرم‌افزار میپل برای موارد زیر استفاده شده است:
رسم سطح‌های مختلف در فضا (فصل۲)، رسم منحنی‌ها در فضا (فصل۳)، رسم منحنی‌ها در مختصات قطبی (فصل۴)، محاسبه لاپلاس و لاپلاس معکوس یک تابع (فصل۸)، محاسبه مجموع جمله‌های یک سری (فصل۹)، محاسبات مختلف در بحث ماتریس‌ها (فصل۱۱)، حل معادله و حل دستگاه‌های چند معادله چند مجهولی (فصل۱۱)

تمرین

۱- جدول تغییرات تابع داده شده را تنظیم و به کمک آن، نمودار تابع را رسم کنید.

۱) $f(x) = 2x - x^2$ ۲) $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

۳) $f(x) = (1 - x)^3$ ۴) $f(x) = 3x^2 - x^3$

۵) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ ۶) $f(x) = (x - 1)(x - 2)^2$

۷) $f(x) = x^4 - 6x^2$ ۸) $f(x) = 4x^3 - x^4$

۹) $f(x) = x^4$ ۱۰) $f(x) = 1 - (x - 1)^4$

۱۱) $f(x) = \frac{1}{x}$ ۱۲) $f(x) = \frac{2x+1}{1-x}$

۱۳) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ۱۴) $f(x) = \frac{2x+1}{x}$

۲- جدول تغییرات تابع داده شده را تنظیم و به کمک آن، نمودار تابع را رسم کنید.

۱) $f(x) = \frac{-2x}{x^2+1}$ ۲) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

۳) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ ۴) $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2+4}$

۵) $f(x) = \cot x$ ۶) $f(x) = \sec x$

۷) $f(x) = 2xe^x$ ۸) $f(x) = x^2e^x$

۹) $f(x) = x\, Ln\, x$ ۱۰) $f(x) = \frac{x}{Ln\, x}$

۳- نمودار توابع تمرین۲ را به کمک یکی از نرم‌افزارهای ریاضی رسم کنید. بدین وسیله می‌توانید درستی اعمال خود را در تمرین قبل، بررسی کنید.

۴-۹ مسائل کاربردی ماکزیمم و می‌نیمم[1]

این بخش، مهمترین و شاید مشکل‌ترین قسمت فصل چهارم می‌باشد. زیرا برای حل یک مساله باید حوصله کرد، اندیشید و کلیه آموخته‌های قبلی را به کار گرفت. در این بخش کاربرد ریاضیات را بیشتر احساس خواهید کرد.

روش‌هایی که برای یافتن مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم در بخش‌های قبل این فصل آموخته‌ایم در بسیاری از مسائل روزمره کاربرد عملی دارند. در روز عبارت‌هایی مانند بیشترین سود، کمترین هزینه، حداقل زمان ممکن، بزرگترین مقاومت، بیشترین ولتاژ، کمترین مساحت، بیشترین حجم، کمترین فاصله و یا عبارت‌های مشابه را فراوان می‌شنویم یا می‌خوانیم. در حل این نوع مسائل، بزرگترین مشکل بیان مسئله به زبان ریاضی است. برای این منظور باید متغیری که می‌خواهیم ماکزیمم یا می‌نیمم شود، به صورت تابعی از سایر متغیرهای مسئله بنویسیم. به محض یافتن تابع، تقریباً مسئله را حل شده محسوب می‌کنیم. زیرا قبلاً در محاسبه اکسترمم‌های یک تابع، تسلط کافی پیدا کرده‌ایم.

توصیه‌هایی برای حل مسائل کاربردی:

۱- برای اینکه به روشنی درک کنید مساله برای چه چیزی طرح شده، آن را چند بار با دقت بخوانید.

۲- در صورت امکان برای مسئله شکلی رسم کنید.

۳- متغیرهای موجود در مسئله را، نام گذاری کنید.

۴- تلاش کنید متغیری که می‌خواهد اکسترمم شود، برحسب سایر متغیرها بیان کنید.

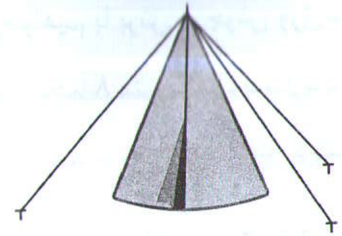
۵- برای تابع جدید دامنه را مشخص کنید.

۶- برای یافتن اکسترمم تابع، روش‌هایی که در بخش‌های قبل بیان شده را به کار ببرید.

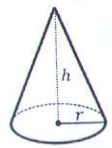
- در ذیل چند مثال به عنوان نمونه آمده است، آنها می‌توانند الگوهای مناسبی برای حل مسائل مشابه باشند.

۱- بعضی از مؤلفین این بحث را با عنوان **بهینه‌سازی** مورد بررسی قرار داده‌اند.

۱۱- اندازه مولّد[1] یک خیمه مخروطی شکل ۱۰ فوت است. ارتفاع خیمه را چقدر انتخاب کنیم تا فضای آن بیشترین مقدار شود.



۱۲- هزینه چاپ هر کارت عروسی برای زمانی که تعداد سفارش ۱۰۰ و یا کمتر باشد ۴۰۰ ریال است، و اگر تعداد سفارش بیش از ۱۰۰ شود، هزینه هر کارت به اندازه ۰/۵ ریال به ازای هر کارت مازاد بر ۱۰۰ عدد، تقلیل می‌یابد. اگر حداکثر تعداد سفارش یک مجلس عروسی ۵۰۰ کارت باشد، به ازای چند سفارش، درآمد چاپخانه در این مورد خاص بیشترین می‌شود.



۱- در مخروط دوّار، پاره خطی که رأس مخروط را به یکی از نقاط محیط قاعده وصل می‌کند، **مولّد** نامیده می‌شود. مخروط دوّار را می‌توان از دوران مولّد، حول خطی که از رأس می‌گذرد و بر قاعده عمود می‌باشد، تولید کرد.

فصل پنجم

انتگرال

۵- ۱ مفهوم انتگرال و قوانین انتگرال‌گیری

در فصل سوم با عمل مشتق‌گیری از یک تابع آشنا شدید. در بسیاری از مسائل ریاضی و کاربردهای آن، عکس عمل مشتق‌گیری لازم است؛ یعنی مشتق تابع داده شده و به دنبال تابع اولیه هستیم. هر گاه تابع مشتق را با $f(x)$ و تابع اولیه را با $F(x)$ نمایش دهیم، داریم: $F'(x) = f(x)$

به عنوان نمونه هرگاه $f(x) = ۲x$ ، برای هر عدد حقیقی c هر تابع به صورت $F(x) = x^۲ + c$ یک تابع اولیه برای $f(x)$ می‌باشد، زیرا: $F'(x) = ۲x$. بنابراین برای تابع $f(x)$ تعداد نامتناهی تابع اولیه می‌توان در نظر گرفت. تحت شرایط خاص، مقدار ثابت c را می‌توان مشخص کرد. مثال زیر این مطلب را توضیح می‌دهد.

مثال ۱: تابعی را پیدا کنید که مشتق آن برابر $f(x) = ۲x$ باشد و نمودار این تابع از نقطه $(۲,۳)$ بگذرد.

حل: اگر تابع اولیه را با $F(x)$ نشان دهیم داریم: $F(x) = x^۲ + c$ و $F(۲) = ۳$

$\rightarrow ۲^۲ + c = ۳ \rightarrow c = -۱ \rightarrow F(x) = x^۲ - ۱$

مثال ۲: تابع اولیه چند تابع آشنا در زیر معرفی شده است.

۱) $f(x) = 3x^2 \rightarrow F(x) = x^3 + c$

۲) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow F(x) = \sqrt{x} + c$

۳) $f(x) = \frac{-1}{x^2} \rightarrow F(x) = \frac{1}{x} + c$

۴) $f(x) = \cos x \rightarrow F(x) = \sin x + c$

۵) $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow F(x) = \tan^{-1} x + c$

۶) $f(x) = e^x \rightarrow F(x) = e^x + c$

تذکر ۱ : از این به بعد برای سهولت در عملیات یافتن تابع اولیه، تابع $F(x)$ را بدون ثابت c در نظر می‌گیریم. بنابراین اگر $F(x)$ یک تابع اولیه برای $f(x)$ و c یک عدد حقیقی باشد، هر تابع به صورت $F(x) + c$ نیز یک تابع اولیه برای $f(x)$ است.

تعریف ۱: تابع $F(x) + c$ را انتگرال $f(x)$ نامیده و با نماد $\int f(x)\, dx$ نمایش می‌دهیم. عملی که ما را از $f(x)$ به عبارت $F(x) + c$ می‌رساند، انتگرال‌گیری می‌نامیم. هم‌چنین تابع f را تابع زیر انتگرال یا انتگرالده انتگرال و c را ثابت انتگرال گیری می‌گوییم.

تذکر ۲ : عبارت $\int f(x)\, dx$ را **انتگرال نامعین** $f(x)$ یا به صورت مختصر انتگرال $f(x)$ می‌خوانیم. در فصل بعد به هر انتگرال بر روی یک فاصله، یک عدد نسبت می‌دهیم که آن را انتگرال معین می‌گوییم. آوردن لفظ اضافه نامعین، برای تفکیک بین این دو مطلب می‌باشد.

تذکر ۳: الف) با توجه به تعریف ۱، عمل انتگرال‌گیری عکس عمل مشتق‌گیری می‌باشد.
ب) در عبارت $\int f(x)\, dx$ ، dx نشان می‌دهد که متغیر انتگرال‌گیری x است. مفید بودن این نوع نمایش را در قسمت انتگرال‌گیری به روش تغییر متغیر احساس خواهید کرد.

لطیفه: در مورد انتخاب نماد $\int$ ، بعضی بر این باورند که این علامت از کشیده شدن حرف S در امتداد قائم به وجود آمده است. حرف S از ابتدای کلمه Sum به معنی مجموع گرفته شده است. شاید هم این علامت تغییر یافته حرف یونانی ς (سیگما) باشد[1]. در ریاضی از حرف سیگما برای نمایش مجموع تعداد متناهی یا نامتناهی جملات استفاده می‌شود. علت وابستگی نماد $\int$ به کلمه «**مجموع**» را در فصل ششم (فصل کاربرد انتگرال‌ها) مشاهده خواهید کرد.

مثال ۳: به کمک تعریف ۱، تابع اولیه مثال‌های ۱و۲ را به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

۱) $(x^2 + c)' = 2x \rightarrow \int 2x\, dx = x^2 + c$

۲) $(x^3 + c)' = 3x^2 \rightarrow \int 3x^2\, dx = x^3 + c$

۳) $(\sqrt{x} + c)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + c$

۴) $(\frac{1}{x} + c)' = \frac{-1}{x^2} \rightarrow \int \frac{-1}{x^2} dx = \frac{1}{x} + c$

۵) $(\sin x + c)' = \cos x \rightarrow \int \cos x\, dx = \sin x + c$

۶) $(\tan^{-1} x + c)' = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow \int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$

۷) $(e^x + c)' = e^x \rightarrow \int e^x\, dx = e^x + c$

توجه: مثال فوق نشان می‌دهد که مشابه عمل مشتق‌گیری، برای عمل انتگرال‌گیری نیز قوانینی وجود دارد که یافتن تابع اولیه را ساده‌تر می‌کند. در این کتاب **مجموعه قوانین انتگرال‌گیری را به پنج دسته تقسیم کرده‌ایم** و پس از بیان هر دسته به ذکر مثال‌هایی پرداخته‌ایم.

۱- حرف یونانی سیگما ($Sigma$) دارای سه نمایش است: $\Sigma, \sigma, \varsigma$

دسته اول قوانین انتگرال‌گیری: قانون‌های زیر به‌طور مستقیم از قانون‌های مشتق‌گیری نتیجه می‌شود.

۱) $\int dx = x + c$

۲) $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx \quad , \quad (a \in \mathbb{R})$

۳) $\int \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

۴) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , \quad (n \neq -1)$

مثال ۴: انتگرال‌های زیر به کمک قوانین انتگرال‌گیری محاسبه شده‌اند.

۱) $\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + c$

۲) $\int \frac{1}{y^3}dy = \int y^{-3}\,dy = \frac{y^{-3+1}}{-3+1} + c = \frac{y^{-2}}{-2} + c = \frac{-1}{2y^2} + c$

۳) $\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + c = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c$

۴) $\int 4z^2\,dz = 4\int z^2\,dz = 4(\frac{z^3}{3}) + c = \frac{4}{3}z^3 + c$

۵) $\int (2x + \frac{1}{x^3})\,dx = \int 2x\,dx + \int \frac{1}{x^3}dx = x^2 - \frac{1}{2x^2} + c$

۶) $\int (u^2 - 3u + 5)\,du = \int u^2\,du - 3\int u\,du + 5\int du$

$$= \frac{1}{3}u^3 - \frac{3}{2}u^2 + 5u + c$$

۷) $\int \frac{x^3+2x^2}{\sqrt{x}}dx = \int (x^3 + 2x^2)x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int (x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}})\,dx$

$$= \int x^{\frac{5}{2}}\,dx + \int 2x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + 2(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}) + c = \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + \frac{4}{5}\sqrt{x^5} + c$$

تذکر: پس از اینکه در محاسبه انتگرال‌ها مهارت کافی پیدا کردید، ضرورتی به تفکیک انتگرال‌ها نیست و می‌توانید جواب انتگرال را خلاصه‌تر بنویسید.

انتگرال‌گیری به روش تغییر متغیر:

در اغلب اوقات با انتگرال‌هایی مواجه می‌شویم که برای ما ناآشنا هستند، روش‌هایی وجود دارد که می‌توان این انتگرال‌ها را به انتگرال‌های آشنا تبدیل و حل کرد. یکی از روش‌هایی که بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد، روش تغییر متغیر نام دارد. درستی این روش بر اساس قانون مشتق تابع مرکب می‌باشد. با ذکر چند مثال با این روش آشنا می‌شویم؛ سپس بیان سایر قوانین انتگرال‌گیری را ادامه داده و در بخش بعد چند روش دیگر انتگرال‌گیری را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مثال ۵: برای محاسبه $\int (2x-1)^3\,dx$ مراحل زیر را طی می‌کنیم.

ابتدا قرار می‌دهیم: $u = 2x - 1$ و سپس دیفرانسیل این عبارت را محاسبه می‌کنیم.

$$du = 2\,dx \rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

سپس انتگرال را برحسب متغیر u می‌نویسیم:

$$\int (2x-1)^3\,dx = \int u^3(\frac{1}{2}du) = \frac{1}{2}\int u^3\,du$$

جواب انتگرال اخیر به کمک قوانین انتگرال‌گیری به صورت زیر است:

$$\frac{1}{2}\int u^3\,du = \frac{1}{2}\frac{u^4}{4} + c = \frac{1}{8}u^4 + c$$

بنابراین داریم:

$$\int (2x-1)^3\,dx = \frac{1}{8}(2x-1)^4 + c$$

مثال ۶: برای محاسبه $\int x^2(x^3+2)^5\,dx$ مراحل زیر را طی می‌کنیم.

ابتدا قرار می‌دهیم: $u = x^3 + 2$ و سپس دیفرانسیل این عبارت را محاسبه می‌کنیم.

$$du = 3x^2\,dx \rightarrow x^2\,dx = \frac{1}{3}du$$

سپس انتگرال را برحسب متغیر u می‌نویسیم:

$$\int x^2(x^3+2)^5\,dx = \int (x^3+2)^5\,(x^2dx) = \int u^5\,(\frac{1}{3}du) = \frac{1}{3}\int u^5\,du$$

جواب انتگرال اخیر به کمک قوانین انتگرال‌گیری به صورت ذیل است:

$$\frac{1}{3}\int u^5\,du=\frac{1}{3}\frac{u^6}{6}+c=\frac{1}{18}u^6+c$$

بنابراین داریم:

$$\int x^2(x^3+2)^5\,dx=\frac{1}{18}(x^3+2)^6+c$$

مثال ۷ : انتگرال‌های زیر با توجه به توضیحات روش تغییر متغیر در دو مثال قبل، حل شده‌اند.

۱) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3x^2-1}}$

$u=3x^2-1\to du=6x\,dx\to x\,dx=\frac{1}{6}du$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{3x^2-1}}=\int\frac{1}{\sqrt{u}}\left(\frac{1}{6}du\right)=\frac{1}{6}\int u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{1}{6}\left(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right)+c$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)+c=\frac{1}{3}\sqrt{u}+c=\frac{1}{3}\sqrt{3x^2-1}+c$$

۲) $\int x\sqrt{1+x}\,dx$

$u=1+x\to(du=dx\,,\ x=u-1)$

$$\int x\sqrt{1+x}\,dx=\int(u-1)\sqrt{u}\,du=\int(u-1)u^{\frac{1}{2}}du$$

$$=\int\left(u^{\frac{3}{2}}-u^{\frac{1}{2}}\right)du=\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c$$

$$=\frac{2}{5}\sqrt{u^5}-\frac{2}{3}\sqrt{u^3}+c$$

$$=\frac{2}{5}\sqrt{(1+x)^5}-\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}+c$$

۳) $\int\frac{x^2}{\sqrt{x+2}}dx$

$u=x+2\to(du=dx\,,x=u-2)$

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x+2}}dx=\int\frac{(u-2)^2}{\sqrt{u}}du=\int u^{-\frac{1}{2}}(u^2-4u+4)\,du$$

$$=\int\left(u^{\frac{3}{2}}-4u^{\frac{1}{2}}+4u^{-\frac{1}{2}}\right)du$$

$$=\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-4\left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)+4\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)+c$$

$$=\frac{2}{5}\sqrt{(x+2)^5}-\frac{8}{3}\sqrt{(x+2)^3}+8\sqrt{(x+2)}+c$$

دسته دوم قوانین انتگرال‌گیری: قوانین زیر از مشتق توابع مثلثاتی به‌دست آمده‌اند.

۱) $(\sin x)'=\cos x\to\int\cos x\,dx=\sin x+c$

۲) $(\cos x)'=-\sin x\to\int\sin x\,dx=-\cos x+c$

۳) $(\tan x)'=1+\tan^2x=\frac{1}{\cos^2x}=\sec^2x$

$\to\int(1+\tan^2x)\,dx=\int\frac{1}{\cos^2x}dx=\int\sec^2x\,dx=\tan x+c$

۴) $(\cot x)'=-(1+\cot^2x)=-\frac{1}{\sin^2x}=-\csc^2x$

$\to\int(1+\cot^2x)\,dx=\int\frac{1}{\sin^2x}dx=\int\csc^2x\,dx=-\cot x+c$

۵) $(\sec x)'=\sec x\ \tan x\to\int\sec x\ \tan x\,dx=\sec x+c$

۶) $(\csc x)'=-\csc x\ \cot x\to\int\csc x\ \cot x\,dx=-\csc x+c$

مثال ۸: انتگرال‌های زیر به کمک قوانینی که تا کنون خوانده‌ایم حل شده‌اند.

۱) $\int(5\sin x-3\cos x)\,dx=-5\cos x-3\sin x+c$

۲) $\int\cos 2x\,dx$

$u=2x\to dx=\frac{1}{2}du$

$$\int\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int\cos u\,du=\frac{1}{2}\sin u+c=\frac{1}{2}\sin 2x+c$$

۳) $\int\frac{\cos x}{\sin^3x}dx$

$u=\sin x\to du=\cos x\,dx$

$$\int\frac{\cos x}{\sin^3x}dx=\int\frac{du}{u^3}=\int u^{-3}du=\frac{u^{-2}}{-2}+c=\frac{-1}{2u^2}+c=\frac{-1}{2\sin^2x}+c$$

۴) $\int x\sin(x^2+1)\,dx$

$u=x^2+1\to du=2x\,dx\to x\,dx=\frac{1}{2}du$

$$\int x\sin(x^2+1)\,dx=\frac{1}{2}\int\sin u\,du=\frac{-1}{2}\cos u+c$$

$$=\frac{-1}{2}\cos(x^2+1)+c$$

۵) $\int \sin 2x \cos^5 2x\, dx$

$u = \cos 2x \rightarrow du = -2 \sin 2x\, dx \rightarrow \sin 2x\, dx = \frac{-1}{2} du$

$$\int \sin 2x \; \cos^5 2x\, dx = \frac{-1}{2}\int u^5\, du = \frac{-1}{2}\,\frac{u^6}{6} + c = \frac{-1}{12}\, \cos^6 2x + c$$

۶) $\int \cos x \sqrt{2 + \sin x}\, dx$

$u = 2 + \sin x \rightarrow du = \cos x\, dx$

$$\int \cos x \; \sqrt{2 + \sin x}\, dx = \int \sqrt{u}\, du = \int u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{u^3} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(2 + \sin x)^3} + c$$

۷) $\int (1 + \tan^2 5x)\, dx$

$u = 5x \rightarrow du = 5\, dx \rightarrow dx = \frac{1}{5}\, du$

$$\int (1 + \tan^2 5x)\, dx = \frac{1}{5}\int (1 + \tan^2 u)\, du = \frac{1}{5}\tan u + c$$

$$= \frac{1}{5}\tan(5x) + c$$

۸) $\int \frac{1}{\sin^2 3x} dx$

$u = 3x \rightarrow du = 3\, dx \rightarrow dx = \frac{1}{3} du$

$$\int \frac{1}{\sin^2 3x} dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sin^2 u} du = \frac{1}{3}\int \csc^2 u\, du$$

$$= \frac{-1}{3}\cot u + c = \frac{-1}{3}\, \cot 3x + c$$

۹) $\int \sec^2(3x - 1)\, dx$

$u = 3x - 1 \rightarrow du = 3\, dx \rightarrow dx = \frac{1}{3} du$

$$\int \sec^2(3x - 1)\, dx = \frac{1}{3}\int \sec^2 u\, du = \frac{1}{3}\tan u + c = \frac{1}{3}\tan(3x - 1) + c$$

۱۰) $\int \sec(5x + 2) \tan(5x + 2)\, dx$

$u = 5x + 2 \rightarrow du = 5\, dx \rightarrow dx = \frac{1}{5} du$

$$\int \sec(5x + 2) \tan(5x + 2)\, dx = \frac{1}{5}\int \sec u \; \tan u\, du$$

$$= \frac{1}{5}\, \sec u + c = \frac{1}{5}\, \sec(5x + 2) + c$$

مثال ۹: بعضی از انتگرال‌های شامل توابع مثلثاتی به کمک **اتحادهای مثلثاتی یا دسته‌بندی مناسب** قابل حل می‌باشند. در نمونه‌های زیر با بعضی از آنها آشنا می‌شوید.

۱) $\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\, \sin 2x + c$$ (بنا بر مثال ۸ قسمت دوم)

۲) $\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\, \sin 2x + c$$ (بنا بر مثال ۸ قسمت دوم)

۳) $\int \sin^3 x\, dx = \int \sin x \; \sin^2 x\, dx = \int \sin x \; (1 - \cos^2 x)\, dx$

$u = \cos x \rightarrow du = -\sin x\, dx \rightarrow \sin x\, dx = -du$

$$\int \sin^3 x\, dx = -\int (1 - u^2)\, du = -u + \frac{1}{3}u^3 + c$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$$

۴) $\int \sec^2 x \tan x\, dx = \int \sec x\, (\sec x \tan x)\, dx$

$u = \sec x \rightarrow du = \sec x \tan x\, dx$

$$\int \sec^2 x \tan x\, dx = \int u\, du = \frac{1}{2}u^2 + c = \frac{1}{2}\sec^2 x + c$$

۵) $\int \tan^2 x\, dx = \int [(\tan^2 x + 1) - 1]\, dx$

$$= \int (\tan^2 x + 1)\, dx - \int dx = \tan x - x + c$$

۶) $\int \sin 3x \cos 2x\, dx = \int \frac{1}{2}[\sin(3x + 2x) + \sin(3x - 2x)]\, dx$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 5x\, dx + \frac{1}{2}\int \sin x\, dx = \frac{-1}{10}\, \cos 5x - \frac{1}{2}\, \cos x + c$$

۷) $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \int (\sin x \cos x)^2\, dx = \int (\frac{1}{2}\, \sin 2x)^2\, dx$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x\, dx$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\, \sin 4x + c$$

۸) $\int \tan^3 x\,dx = \int \tan x\,(\tan^2 x + 1 - 1)\,dx$

$= \int \tan x\,(\tan^2 x + 1)\,dx - \int \tan x\,dx$

$(u = \tan x \to du = (\tan^2 x + 1)\,dx)$

$= \int u\,du - \int \tan x\,dx = \frac{1}{2}u^2 - \int \tan x\,dx$

$= \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + c$

تذکر : به کمک دسته چهارم قوانین انتگرال‌گیری در چند صفحه بعد داریم: $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c$

مثال ۱۰: اگر $f'(x) = \sqrt[3]{x+5}$ و $f(3) = 15$ ، ضابطه تابع f را بیابید.

حل : $f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \sqrt[3]{x+5}\,dx = \int \sqrt[3]{u}\,du$

$(u = x + 5 \to du = dx)$

$= \int u^{\frac{1}{3}}\,du = \frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4}\sqrt[3]{u^4} + c = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+5)^4} + c$

$\to f(x) = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+5)^4} + c$

$f(3) = 15 \to \frac{3}{4}\sqrt[3]{(3+5)^4} + c = 15 \to \frac{3}{4}(16) + c = 15 \to c = 3$

$\to f(x) = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+5)^4} + 3$

مثال ۱۱: اگر $f''(x) = \cos x$ و $f'(\frac{\pi}{2}) = 3$ و $f(\frac{\pi}{2}) = \pi$ ، ضابطه تابع f را بیابید.

حل : $f'(x) = \int f''(x)dx = \int \cos x\,dx = \sin x + c_1$

$f'(\frac{\pi}{2}) = 3 \to \sin(\frac{\pi}{2}) + c_1 = 3 \to 1 + c_1 = 3 \to c_1 = 2$

$\to f'(x) = \sin x + 2$

$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int(\sin x + 2)\,dx = -\cos x + 2x + c_2$

$f(\frac{\pi}{2}) = \pi \to -\cos(\frac{\pi}{2}) + 2(\frac{\pi}{2}) + c_2 = \pi \to 0 + \pi + c_2 = \pi \to c_2 = 0$

$\to f(x) = -\cos x + 2x$

تمرین

۱- انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int (x^2 - 2x + 3)\,dx$ ۲) $\int (2x^4 - 5x^2 + 1)\,dx$

۳) $\int (\frac{1}{u^2} - 5u)\,du$ ۴) $\int (\frac{2}{u^3} - \frac{3}{u^2})\,du$

۵) $\int (\sqrt[3]{z^2} + \sqrt{z})\,dz$ ۶) $\int (2\sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt{z}})\,dz$

۷) $\int \sqrt[3]{x}\,(x+2)\,dx$ ۸) $\int \sqrt{x}\,(x^2+1)\,dx$

۹) $\int \frac{u^2 + 2\sqrt{u}}{\sqrt[3]{u}}\,du$ ۱۰) $\int \frac{u^2 - 5\sqrt[3]{u}}{u\sqrt{u}}\,du$

۲- انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int (\frac{1}{2}x - 2)^4\,dx$ ۲) $\int (5x - 3)^4\,dx$

۳) $\int x(2x^2 + 3)^6\,dx$ ۴) $\int x^2(5 - x^3)^7\,dx$

۵) $\int \frac{2x+1}{(x^2+x)^3}\,dx$ ۶) $\int \frac{3x^2+1}{(x^3+x)^4}\,dx$

۷) $\int \sqrt{2x+3}\,dx$ ۸) $\int \sqrt[3]{x+4}\,dx$

۹) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx$ ۱۰) $\int x^2\sqrt[3]{x^3+2}\,dx$

۱۱) $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{1 + \frac{1}{x}}\,dx$ ۱۲) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1 + \sqrt{x}}\,dx$

۱۳) $\int 2x\sqrt{2x+3}\,dx$ ۱۴) $\int \frac{x}{\sqrt{2x+2}}\,dx$

۱۵) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}\,dx$ ۱۶) $\int x^2\sqrt[3]{x+1}\,dx$

۳- انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int \sin 4x\,dx$ ۲) $\int \cos 3x\,dx$

۳) $\int \cos(\frac{1}{2}x)\,dx$ ۴) $\int \sin(\frac{1}{2}x)\,dx$

۵) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

۶) $\int \frac{1}{x^2}\sin(\frac{1}{x})\,dx$

۷) $\int x^2 \sin(x^3-1)\,dx$

۸) $\int 3x\cos(2-x^2)\,dx$

۹) $\int (1+\tan^2 3x)\,dx$

۱۰) $\int (1+\cot^2 5x)\,dx$

۱۱) $\int \sec^2 2x\,dx$

۱۲) $\int x\csc^2(x^2)\,dx$

۱۳) $\int \csc(2x+3)\cot(2x+3)\,dx$

۱۴) $\int \sec(2-x)\tan(2-x)\,dx$

۱۵) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{5+\cos x}}\,dx$

۱۶) $\int \cos x\,(2+\sin x)^3\,dx$

۱۷) $\int \sin^3 5x\cos 5x\,dx$

۱۸) $\int \frac{\sin 4x}{\cos^2 4x}\,dx$

۴- انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int \cos^2 3x\,dx$

۲) $\int \sin^2 4x\,dx$

۳) $\int \sin^3 4x\,dx$

۴) $\int \cos^3 2x\,dx$

۵) $\int \sec^2 2x\tan 2x\,dx$

۶) $\int \csc^2 3x\cot 3x\,dx$

۷) $\int \cot^2 x\,dx$

۸) $\int \tan^2 2x\,dx$

۹) $\int \sin 3x\sin x\,dx$

۱۰) $\int \cos 3x\cos 2x\,dx$

۵- تابع $f(x)$ را با شرایط داده شده بیابید.

۱) $f'(x)=x^2+3x \;,\; f(1)=2$

۲) $f'(x)=\cos 2x \;,\; f(\frac{\pi}{2})=1$

۳) $f'(x)=\sqrt{x+2} \;,\; f(2)=\frac{1}{3}$

۴) $f'(x)=x\sin x^2 \;,\; f(0)=2$

۵) $f''(x)=\sin x \;,\; f'(\pi)=3 \;,\; f(0)=1$

۶) $f''(x)=3x \;,\; f'(1)=2 \;,\; f(1)=0$

ادامه قوانین انتگرال‌گیری

دسته سوم قوانین انتگرال‌گیری: قوانین زیر از مشتق توابع معکوس مثلثاتی به‌دست آمده است [1].

۱) $(\sin^{-1}x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sin^{-1}x+c$

۲) $(\tan^{-1}x)'=\frac{1}{1+x^2} \rightarrow \int\frac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}x+c$

۳) $(\sec^{-1}x)'=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \rightarrow \int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx=\sec^{-1}|x|+c$

از سه فرمول انتگرال‌گیری فوق با فرض $a>0$ و به کمک تغییر متغیر $u=\frac{x}{a}$، سه فرمول زیر را می‌توان نتیجه گرفت. در مثال بعد اثبات یکی از این فرمول‌ها را آورده‌ایم.

۴) $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\sin^{-1}(\frac{x}{a})+c$

۵) $\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\tan^{-1}(\frac{x}{a})+c$

۶) $\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}dx=\frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right|+c$

مثال ۱۲: اثبات فرمول انتگرال‌گیری شماره۴ به کمک فرمول شماره۱ به شرح زیر می‌باشد. لازم به یادآوری است که $a>0$ می‌باشد.

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}}dx=\int\frac{1}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\frac{1}{a}dx$$

$(u=\frac{x}{a}\rightarrow du=\frac{1}{a}dx)$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du=\sin^{-1}u+c=\sin^{-1}(\frac{x}{a})+c$$

۱- ممکن است برای انتگرال‌های ۳و۶ در کتاب‌های دیگر فرمول‌هایی بدون قدرمطلق مشاهده کنید. علت این می‌باشد که در محدود کردن دامنه تابع سکانت برای اینکه معکوس داشته باشد نظر یکسانی وجود ندارد. اگر برای تابع $\sec x$ دامنه را مجموعه $[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi]$ انتخاب کنیم در فرمول مشتق $\sec^{-1}x$ و در انتگرال نظیر آن، قدرمطلق ظاهر می‌شود.

مثال ۱۳: انتگرال‌های زیر به کمک قوانینی که تا کنون خوانده‌ایم حل شده‌اند.

۱) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}}dx = \sin^{-1}(\frac{x}{2}) + c$

۲) $\int \frac{4}{9+x^2}dx = 4\int \frac{1}{3^2+x^2}dx = 4(\frac{1}{3})\tan^{-1}(\frac{x}{3}) + c$

۳) $\int \frac{1}{3x\sqrt{9x^2-1}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}du = \frac{1}{3}\sec^{-1}|u| + c$

$= \frac{1}{3}\sec^{-1}|3x| + c$

$u = 3x \to du = 3\,dx \to dx = \frac{1}{3}du$

۴) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{2^2-u^2}} = \frac{1}{3}\sin^{-1}(\frac{u}{2}) + c = \frac{1}{3}\sin^{-1}(\frac{3x}{2}) + c$

$u = 3x \to du = 3\,dx \to dx = \frac{1}{3}du$

۵) $\int \frac{dx}{4x^2+25} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+5^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{5}\tan^{-1}(\frac{u}{5}) + c = \frac{1}{10}\tan^{-1}(\frac{2x}{5}) + c$

$u = 2x \to du = 2\,dx \to dx = \frac{1}{2}du$

۶) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{du}{u^2+2^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}(\frac{u}{2}) + c = \frac{1}{2}\tan^{-1}(\frac{x+1}{2}) + c$

$x^2 + 2x + 5 = (x^2 + 2x + 1) + 4 = (x+1)^2 + 2^2 = u^2 + 2^2$

$u = x + 1 \to du = dx$

۷) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2-2x}} = \int \frac{du}{\sqrt{2^2-u^2}} = \sin^{-1}(\frac{u}{2}) + c = \sin^{-1}(\frac{x+1}{2}) + c$

$3 - x^2 - 2x = 4 - (x^2 + 2x + 1) = 2^2 - (x+1)^2 = 2^2 - u^2$

$u = x + 1 \to du = dx$

۸) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}} = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-(x^3)^2}}$

$u = x^3 \to du = 3x^2\,dx \to x^2\,dx = \frac{1}{3}du$

$= \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{3}\sin^{-1}u + c = \frac{1}{3}\sin^{-1}(x^3) + c$

دسته چهارم قوانین انتگرال‌گیری: قوانین زیر از مشتق توابع نمایی و لگاریتمی بدست آمده است.

۱) $(a^x)' = (\ln a)\,a^x \to \int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + c$

۲) $(e^x)' = e^x \to \int e^x\,dx = e^x + c$ برای حالت قبل با فرض $a = e$ داریم:

۳) $(\ln x)' = \frac{1}{x} \to \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$

مثال ۱۴: انتگرال‌های زیر به کمک قوانینی که تا کنون خوانده‌ایم حل شده‌اند.

۱) $\int 2^x\,dx = \frac{1}{\ln 2}2^x + c$

۲) $\int e^{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int e^u\,du = \frac{1}{3}e^u + c = \frac{1}{3}e^{3x+1} + c$

$u = 3x + 1 \to du = 3\,dx \to dx = \frac{1}{3}du$

۳) $\int \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln|2x-1| + c$

$u = 2x - 1 \to du = 2\,dx \to dx = \frac{1}{2}du$

۴) $\int \cos 3x\, e^{\sin 3x}\,dx = \frac{1}{3}\int e^u\,du = \frac{1}{3}e^u + c = \frac{1}{3}e^{\sin 3x} + c$

$u = \sin 3x \to du = 3\cos 3x\,dx \to \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}du$

۵) $\int x\,3^{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int 3^u\,du = \frac{1}{2\ln 3}3^u + c = \frac{3^{x^2+2}}{2\ln 3} + c$

$u = x^2 + 2 \to du = 2x\,dx \to x\,dx = \frac{1}{2}du$

۶) $\int \frac{e^x}{e^x+3}dx = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + c = \ln|e^x + 3| + c$

$u = e^x + 3 \to du = e^x\,dx$

۷) $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + c = -\ln|\cos x| + c$

$u = \cos x \to du = -\sin x\,dx \to \sin x\,dx = -du$

دسته پنجم قوانین انتگرال‌گیری: قوانین زیر از مشتق توابع هیپربولیک به‌دست آمده است.

$$(\sinh x)' = \cosh x \to \int \cosh x\, dx = \sinh x + c$$

$$(\cosh x)' = \sinh x \to \int \sinh x\, dx = \cosh x + c$$

$$(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x \to \int (1 - \tanh^2 x)\, dx = \tanh x + c$$

$$(\coth x)' = 1 - \coth^2 x \to \int (1 - \coth^2 x)\, dx = \coth x + c$$

مثال ۱۵: انتگرال‌های زیر به کمک قوانینی که تا کنون خوانده‌ایم حل شده‌اند.

۱) $\int \sinh 5x\, dx = \frac{1}{5}\int \sinh u\, du = \frac{1}{5}\cosh u + c = \frac{1}{5}\cosh 5x + c$

$u = 5x \to du = 5\,dx \to dx = \frac{1}{5}du$

۲) $\int \frac{\cosh\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = 2\int \cosh u\, du = 2\sinh u + c = 2\sinh\sqrt{x} + c$

$u = \sqrt{x} \to du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \to \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\,du$

۳) $\int x(1 - \tanh^2 x^2)\, dx = \frac{1}{2}\int (1 - \tanh^2 u)\, du$

$= \frac{1}{2}\tanh u + c = \frac{1}{2}\tanh x^2 + c$

$u = x^2 \to du = 2x\, dx \to x\, dx = \frac{1}{2}du$

۴) $\int \tanh^2 x\; dx = \int [1 - (1 - \tanh^2 x)]\, dx$

$= \int dx - \int (1 - \tanh^2 x)\, dx$

$= x - \tanh x + c$

تمرین

۱- انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ۲) $\int \frac{1}{2(x^2+1)} dx$

۳) $\int \frac{5}{2(x^2+1)} dx$ ۴) $\int \frac{1}{\sqrt{4(1-x^2)}} dx$

۵) $\int \frac{4}{x\sqrt{x^2-1}} dx$ ۶) $\int \frac{-2}{3x\sqrt{x^2-1}} dx$

۷) $\int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} dx$ ۸) $\int \frac{3}{\sqrt{25-x^2}} dx$

۹) $\int \frac{5}{4+x^2} dx$ ۱۰) $\int \frac{4}{5+x^2} dx$

۱۱) $\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}} dx$ ۱۲) $\int \frac{1}{4x^2+9} dx$

۱۳) $\int \frac{5}{4+(x+3)^2} dx$ ۱۴) $\int \frac{2}{\sqrt{4-(x+3)^2}} dx$

۱۵) $\int \frac{1}{\sqrt{8-2x-x^2}} dx$ ۱۶) $\int \frac{1}{4x^2+4x+5} dx$

۱۷) $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$ ۱۸) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}} dx$

۱۹) $\int \frac{x}{1+x^4} dx$ ۲۰) $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx$

۲- انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int e^{2-5x}\, dx$ ۲) $\int xe^{4-x^2}\, dx$

۳) $\int \sin x\; 2^{\cos x}\, dx$ ۴) $\int 5^{3-2x}\, dx$

۵) $\int \frac{1}{3-2x} dx$ ۶) $\int \frac{5}{4+3x} dx$

۷) $\int \frac{x^2}{x^3+1} dx$ ۸) $\int \frac{3x}{x^2+4} dx$

۹) $\int \tan 2x\, dx$ ۱۰) $\int \cot 7x\, dx$

۱۱) $\int \frac{\cos x}{1+2\sin x}dx$ ۱۲) $\int \frac{5^x}{5^x+1}dx$

۱۳) $\int \frac{1}{x\,Ln\,x}dx$ ۱۴) $\int \frac{Ln\,x}{x}dx$

۱۵) $\int \frac{1+e^x}{e^{2x}}dx$ ۱۶) $\int 3^{2x}e^x\,dx$

۱۷) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-(Ln\,x)^2}}dx$ ۱۸) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

۳- انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int x\,sinh(x^2+1)\,dx$ ۲) $\int x^2\,cosh(4+x^3)\,dx$

۳) $\int \frac{1}{x^2}cosh(\frac{1}{x})\,dx$ ۴) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}sinh\sqrt{x}\,dx$

۵) $\int x^2\,[1-tanh^2(x^3+1)]\,dx$ ۶) $\int (2x+1)\,[1-coth^2(x^2+x)]\,dx$

۴- تابع $f(x)$ را با شرایط داده شده بیابید.

۱) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $f(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{3}$

۲) $f'(x)=\frac{1}{4+x^2}$, $f(2)=\frac{\pi}{6}$

۳) $f'(x)=e^{2x-1}$, $f(\frac{1}{2})=2$

۴) $f'(x)=\frac{1}{x+3}$, $f(-2)=1$

۵) $f'(x)=sinh(2x)$, $f(0)=2$

۶) $f'(x)=cosh(\frac{1}{2}x)$, $f(0)=-1$

۵-۲ روش‌های انتگرال‌گیری

بعضی از انتگرال‌ها را به کمک قوانین انتگرال‌گیری که تا کنون خوانده‌ایم نمی‌توان حل کرد. غیر از قوانین گفته شده، روش‌هایی وجود دارد که به کمک آنها انتگرال را می‌توان به شکلی تبدیل نمود که قابل حل به کمک قوانین باشد. یکی از مهمترین روش‌ها، روش تغییر متغیر می‌باشد؛ این روش خود حاوی روش‌های متعددی می‌باشد. بنابر ضرورت، روش تغییر متغیر معمولی را در بخش قبل بیان کردیم. دو نوع روش تغییر متغیر دیگر، به نام‌های روش تغییر متغیر مثلثاتی و روش تغییر متغیر وایرشتراس را در صفحات آینده توضیح خواهیم داد. غیر از روش تغییر متغیر، روش جزء‌به‌جزء و روش انتگرال‌گیری از توابع گویا به کمک تجزیه کسرها، از روش‌های مهم انتگرال‌گیری می‌باشند. ما این روش‌ها را با توجه به اهمیت و ارتباطی که با یکدیگر دارند به ترتیب زیر بیان کرده‌ایم.

- روش‌های انتگرال‌گیری
  - روش تغییر متغیر
    - ۱) تغییر متغیر معمولی
    - ۴) تغییر متغیر مثلثاتی
    - ۵) تغییر متغیر وایرشتراس
  - ۲) روش جزء به جزء
  - ۳) روش انتگرال‌گیری از توابع گویا به وسیله تجزیه کسرها

۱- روش تغییر متغیر معمولی:

با این روش در بخش (۵-۱) آشنا شدیم و به کمک آن انتگرال‌های متعددی را حل کردیم، بعضی از آن مثال‌ها به صورت زیر بود:

$\int (2x-1)^5\,dx=\frac{1}{2}\int u^5\,du=\cdots$, $u=2x-1$

$\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+5}}dx=\frac{3}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du=\cdots$, $u=x^2+5$

$\int e^{5x-3}\,dx=\frac{1}{5}\int e^u\,du=\cdots$, $u=5x-3$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du=\cdots$, $u=2x$

$\int \sin x\,\cos^3 x\,dx=-\int u^3\,du=\cdots$, $u=\cos x$

۲- انتگرال‌گیری به روش جزء‌به‌جزء

مشاهده کردید هر قانون انتگرال‌گیری با یک قانون مشتق‌گیری متناظر می‌باشد. متناظر با قانون مشتق‌تابع مرکب، روش تغییر متغیر را معرفی کردیم. اکنون متناظر با قانون مشتق‌حاصل ضرب دو تابع، روشی دیگر برای انتگرال‌گیری بیان می‌کنیم. فرض کنید u و v توابعی مشتق‌پذیر از x باشند. بنابر قانون مشتق حاصل ضرب دو تابع داریم:

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \to d(uv) = u\,dv + v\,du$$

$$\to \int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du$$

$$\to uv = \int u\,dv + \int v\,du \to \boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

فرمول اخیر را انتگرال‌گیری به روش جزء‌به‌جزء می‌نامند. استفاده از این روش زمانی موفقیت‌آمیز خواهد بود که u و dv مناسب اختیار شود. این کار ابتدا با آزمایش و خطا و سپس تجربه حاصل می‌شود.

مثال ۱: انتگرال‌های زیر به روش جزء به جزء حل شده‌اند.

۱) $\int x\sin x\,dx$

$$\begin{cases} u = x \to du = dx \\ dv = \sin x\,dx \to v = -\cos x \end{cases}$$

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + c$$

۲) $\int x\,Ln\,x\,dx$

$$\begin{cases} u = Ln\,x \to du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x\,dx \to v = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

$$\int x\,Ln\,x\,dx = \frac{1}{2}x^2\,Ln\,x - \int \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{2}x^2\,Ln\,x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\,Ln\,x - \frac{1}{4}x^2 + c = \frac{1}{4}x^2(2Ln\,x - 1) + c$$

۳) $\int xe^x\,dx$

$$\begin{cases} u = x \to du = dx \\ dv = e^x\,dx \to v = e^x \end{cases}$$

$$\int xe^x\,dx = x\,e^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + c = e^x(x-1) + c$$

۴) $\int x^2e^x\,dx$

$$\begin{cases} u = x^2 \to du = 2x\,dx \\ dv = e^x\,dx \to v = e^x \end{cases}$$

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - \int 2xe^x\,dx = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx$$

برای محاسبه $\int xe^x\,dx$ باید یک بار دیگر از روش جزء‌به‌جزء استفاده کنیم، این انتگرال را در صفحه قبل حل کردیم، پس داریم:

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2(xe^x - e^x) + c = (x^2 - 2x + 2)e^x + c$$

۵) $\int tan^{-1}x\,dx$

$$\begin{cases} u = tan^{-1}x \to du = \frac{1}{1+x^2}dx \\ dv = dx \to v = x \end{cases}$$

$$\int tan^{-1}x\,dx = x\,tan^{-1}x - \int \frac{x}{1+x^2}dx$$

برای محاسبه $\int \frac{x}{1+x^2}dx$ از تغییر متغیر $u = 1 + x^2$ استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\int tan^{-1}x\;dx = x\,tan^{-1}x - \frac{1}{2}Ln|1 + x^2| + c$$

۶) $\int e^x\sin x\,dx$

$$\begin{cases} u = e^x \to du = e^x\,dx \\ dv = \sin x\,dx \to v = -\cos x \end{cases}$$

$$I = \int e^x\sin x\,dx = -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx \quad (*)$$

برای محاسبه $\int e^x\cos x\,dx$ بار دیگر از روش جزء‌به‌جزء استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} u = e^x \to du = e^x\,dx \\ dv = \cos x\,dx \to v = \sin x \end{cases}$$

$$\int e^x\cos x\,dx = e^x\sin x - \int e^x\sin x\,dx = e^x\sin x - I$$

با قرار دادن رابطه اخیر در * داریم:

$$I = -e^x\cos x + (e^x\sin x - I) \to 2I = e^x(\sin x - \cos x)$$

$$\to I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + c$$

۳- انتگرال‌گیری از توابع گویا به روش تجزیه کسرها

قبل از توضیح این روش به یادآوری بحث تجزیه کسرها[1] می‌پردازیم. هرگاه $p(x)$ و $q(x)$ چندجمله‌ای باشند، هر عبارت به صورت $\frac{p(x)}{q(x)}$ را یک کسر گویا می‌نامند. هر گاه درجه صورت یک کسر گویا از درجه مخرج آن بیشتر یا مساوی باشد می‌توان با تقسیم صورت بر مخرج، آن را به مجموع یک چندجمله‌ای و یک کسر گویا که درجه صورت آن از درجه مخرج کمتر است تبدیل کرد و با تجزیه مخرج کسر جدید، می‌توان این کسر گویا را به صورت مجموع یا تفاضل چند کسر گویای دیگر نوشت. این عمل را تجزیه کسرها می‌گویند. در حالت‌های زیر که با ذکر مثال‌هایی همراه است با نحوه تجزیه این نوع کسرها وقتی عوامل مخرج درجه یک یا دو باشند، آشنا می‌شوید.

حالت اول: عوامل مخرج درجه یک و غیر تکراری

$$\frac{1}{x(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} \quad , \quad \frac{x^2-5x+1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

حالت دوم: عوامل مخرج درجه یک و بعضی تکراری

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} \quad , \quad \frac{2x^2-3x}{(x+1)^3(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{x+3}$$

حالت سوم: عوامل مخرج درجه یک یا دو و عوامل درجه دو غیر تکراری

$$\frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \quad , \quad \frac{3x^2-7x}{(x^2+1)(x^2+3)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$$

حالت چهارم: عوامل مخرج درجه یک یا دو و بعضی از عوامل درجه دو تکراری

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{7x^3+3x+1}{(x^2+1)^2(x^2+3)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+3}$$

۱- برای کسب مهارت بیشتر برای تجزیه کسرها می‌توانید بخش ۳-۵ از کتاب ریاضیات مقدماتی را مطالعه کنید. در این بخش مثال‌های بیشتر و تمرین‌های متعددی برای تجزیه کسرها آمده است.

لذا اگر در هر یک از حالت‌های فوق با مخرج مشترک‌گیری و مساوی قرار دادن صورت‌های دو کسر، به یک اتحاد بر حسب x می‌رسیم. با مساوی قرار دادن ضرایب جمله‌های متشابه دو طرف این اتحاد، یک دستگاه با چند معادله و چند مجهول مانند A ، B ، C و $\cdots$ پدید می‌آید. پس از حل این دستگاه، تجزیه کسر مورد نظر را می‌توان نوشت.

مثال ۲: کسر $p = \frac{2x+2}{(x^2+1)(x-1)}$ را تجزیه کنید.

حل: این کسر مشابه حالت سوم می‌باشد، لذا آن را به صورت زیر می‌توان تجزیه کرد:

$$p = \frac{2x+2}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

با مخرج مشترک‌گیری و مساوی قرار دادن صورت کسرها داریم:

$$A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1) = 2x+2$$

$$(A+B)x^2 + (C-B)x + (A-C) = 2x+2$$

$$\begin{cases} A+B = 0 \\ C-B = 2 \\ A-C = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -2 \\ C = 0 \end{cases} \rightarrow P = \frac{2}{x-1} - \frac{2x}{x^2+1}$$

نکته: برای یافتن مقادیر A ، B ، C و $\cdots$ غیر از حل دستگاه، روش‌های دیگری نیز وجود دارد. یکی از آنها را همراه با حل دوباره قسمتی از مثال۲ توضیح می‌دهیم. در مثال قبل معادله مقابل یک اتحاد است: $A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1) = 2x+2$

بنابراین به ازای کلیه مقادیر x ، تساوی برقراری است. لذا با انتخاب مقادیری خاص برای x می‌توان معادله را ساده و مقادیر A ، B و C را به‌دست آورد.

$1)\ x = 1 \rightarrow 2A = 4 \rightarrow A = 2$

$2)\ (x = 0\,, A = 2) \rightarrow 2 - C = 2 \rightarrow C = 0$

$3)\ (x = 2\,, A = 2\,, C = 0) \rightarrow 10 + 2B = 6 \rightarrow B = -2$

تذکر: برای انتگرال گیری از یک تابع گویا، ابتدا عبارت گویا را تجزیه کرده، سپس انتگرال را به صورت مجموع یا تفاضل چند انتگرال ساده‌تر می‌نویسیم. مثال‌های بعد این روش را توضیح می‌دهند.

مثال ۳: انتگرال‌های توابع گویای زیر به روش تجزیه کسرها حل شده‌اند.

۱) $\int \frac{2x-1}{x+1}dx$

با تقسیم صورت بر مخرج و نوشتن رابطه تقسیم داریم:

$$\frac{2x-1}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}$$

$$\int \frac{2x-1}{x+1}dx = \int 2\,dx - 3\int \frac{1}{x+1}dx = 2x - 3\,Ln|x+1| + C$$

۲) $\int \frac{5x-1}{x^2-1}dx$

$$\frac{5x-1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \rightarrow (A=2\,,B=3)$$

$$\int \frac{5x-1}{x^2-1}dx = 2\int \frac{1}{x-1}dx + 3\int \frac{1}{x+1}dx$$

$$= 2\,Ln|x-1| + 3\,Ln|x+1| + C$$

۳) $\int \frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)}dx$

$$\frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \rightarrow (A=2\,,B=-2\,,C=0)$$

$$\int \frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)}dx = 2\int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$= 2\,Ln|x-1| - Ln|x^2+1| + C$$

۴) $\int \frac{4-2x}{(x^2+1)(x-1)^2}dx$

$$\frac{4-2x}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$\rightarrow (A=-2\,,B=1\,,C=2\,,D=1)$$

$$\int \frac{4-2x}{(x^2+1)(x-1)^2}dx = -2\int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx + \int \frac{2x+1}{x^2+1}dx$$

$$= -2\,Ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx$$

$$= -2\,Ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + Ln|x^2+1| + tan^{-1}x + C$$

تمرین

۱- انتگرال‌های زیر را به روش جزءبه‌جزء حل کنید.

۱) $\int x\sin 2x\,dx$ ۲) $\int x\cos x\,dx$

۳) $\int Ln\,x\,dx$ ۴) $\int x\,Ln(3x)\,dx$

۵) $\int xe^{3x}\,dx$ ۶) $\int 2xe^{-x}\,dx$

۷) $\int x^2\sin x\,dx$ ۸) $\int x^2 e^{2x}\,dx$

۹) $\int cot^{-1}x\,dx$ ۱۰) $\int sin^{-1}x\,dx$

۱۱) $\int \frac{tan^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ ۱۲) $\int \cos x\;Ln(\sin x)\,dx$

۱۳) $\int (Ln\,x)^2\,dx$ ۱۴) $\int x\,tan^{-1}x\,dx$

۲- انتگرال‌های زیر را به روش تجزیه کسرها حل کنید.

۱) $\int \frac{5x-3}{x+2}dx$ ۲) $\int \frac{x^2+3x}{x-1}dx$

۳) $\int \frac{x^3+4x+1}{x^2+4}dx$ ۴) $\int \frac{x^4+12x^2-26}{x^2+9}dx$

۵) $\int \frac{4}{x^2-4x}dx$ ۶) $\int \frac{5x-2}{x^2-4}dx$

۷) $\int \frac{2x^2+4x-8}{x^3-4x}dx$ ۸) $\int \frac{6x^2-10x+2}{x(x-1)(x-2)}dx$

۹) $\int \frac{3x^2-1}{x^3+x^2}dx$ ۱۰) $\int \frac{1}{x(x^2-2x+1)}dx$

۱۱) $\int \frac{x^2+x}{x^3-x^2+x-1}dx$ ۱۲) $\int \frac{2x^2-x+2}{x^3+x}dx$

۴- انتگرال‌گیری به روش تغییر متغیر مثلثاتی

اگر تابعی که می‌خواهیم از آن انتگرال بگیریم شامل عبارت‌هایی به شکل $\sqrt{a^2-x^2}$، $\sqrt{a^2+x^2}$ و یا $\sqrt{x^2-a^2}$ باشد $(a>0)$، گاهی با تغییر متغیر x به یک تابع مثلثاتی می‌توان انتگرال را حل کرد. هر حالت را جداگانه توضیح می‌دهیم.

حالت اول: اگر تابع شامل عبارتی به شکل $\sqrt{a^2-x^2}$ باشد از تغییر متغیر $x=a\sin t$ که $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$ استفاده می‌کنیم، در این حالت داریم:

$$dx=a\cos t\,dt$$

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}$$
$$=\sqrt{a^2\cos^2 t}=a\cos t$$

حالت دوم: اگر تابع شامل عبارتی به شکل $\sqrt{a^2+x^2}$ باشد از تغییر متغیر $x=a\tan t$ که $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ استفاده می‌کنیم، در این حالت داریم:

$$dx=a(1+\tan^2 t)\,dt$$

$$\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2\tan^2 t}=\sqrt{a^2(1+\tan^2 t)}$$
$$=\sqrt{a^2\sec^2 t}=a\sec t$$

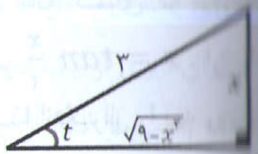
حالت سوم: اگر تابع شامل عبارتی به شکل $\sqrt{x^2-a^2}$ باشد از تغییر متغیر $x=a\sec t$ که $0\le t<\frac{\pi}{2}$ یا $\pi\le t<\frac{3\pi}{2}$ استفاده می‌کنیم، در این حالت داریم:

$$dx=a\sec t\tan t\,dt$$

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\sec^2 t-a^2}=\sqrt{a^2(\sec t^2-1)}$$
$$=\sqrt{a^2\tan^2 t}=a\tan t$$

مثال ۴: انتگرال‌های زیر به روش تغییر متغیر مثلثاتی حل شده‌اند.

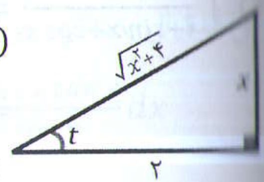
۱) $\int\sqrt{9-x^2}\,dx$



$$\begin{cases}x=3\sin t\to dx=3\cos t\,dt\ ,\ t=\sin^{-1}(\frac{x}{3})\\ \sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-9\sin^2 t}=3\cos t\end{cases}$$

$$\int\sqrt{9-x^2}\,dx=\int(3\cos t)(3\cos t\,dt)=9\int\cos^2 t\,dt$$
$$=9\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{9}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt=\frac{9}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)+c$$
$$=\frac{9}{2}(t+\sin t\cos t)+c=\frac{9}{2}(\sin^{-1}(\frac{x}{3})+\frac{x}{3}\,\frac{\sqrt{9-x^2}}{3})+c$$
$$=\frac{9}{2}\sin^{-1}(\frac{x}{3})+\frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2}+c$$

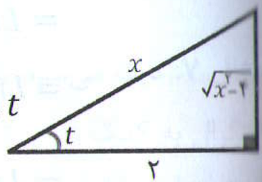
۲) $\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx$



$$\begin{cases}x=2\tan t\to dx=2\sec^2 t\,dt\ ,\ t=\tan^{-1}(\frac{x}{2})\\ \sqrt{x^2+4}=\sqrt{4\tan^2 t+4}=2\sec t\end{cases}$$

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx=\int\frac{2\sec^2 t\,dt}{4\tan^2 t\times 2\sec t}=\frac{1}{4}\int\frac{\sec t}{\tan^2 t}dt$$
$$=\frac{1}{4}\int\frac{\sec t}{\tan^2 t}dt=\frac{1}{4}\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=\frac{1}{4}\int\frac{du}{u^2}\quad(u=\sin t\to du=\cos t\,dt)$$
$$=-\frac{1}{4u}+c=-\frac{1}{4\sin t}+c=-\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}+c$$

۳) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$



$$\begin{cases}x=2\sec t\to dx=2\sec t\tan t\,dt\\ \sqrt{x^2-4}=\sqrt{4\sec^2 t-4}=\sqrt{4\tan^2 t}=2\tan t\end{cases}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}=\int\frac{2\sec t\,\tan t\,dt}{2\tan t}=\int\sec t\,dt$$

دو روش برای حل $\int\sec t\,dt$ در صفحه‌های بعد آمده است. با توجه به شکل داریم: $\sec t=\frac{x}{2}$ و $\tan t=\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$، با کمی محاسبات می‌توان نوشت:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}=\int\sec t\,dt=Ln|\sec t+\tan t|+c=Ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+c_1$$

۵- انتگرال‌گیری از کسرهای گویای مثلثاتی (روش وایرشتراس)

وایرشتراس (۱۸۱۵-۱۸۹۷) ریاضی‌دان آلمانی کشف کرد که در هر تابع کسری که صورت و مخرج آن از $sin\,x$ و $cos\,x$ تشکیل شده باشد، تغییر متغیر $z = tan\,\frac{x}{۲}$، آن را از یک تابع گویای مثلثاتی به یک تابع گویا تبدیل می‌کند و لذا انتگرال را به روش ساده‌تری می‌توان حل کرد. با این تغییر متغیر، عبارات زیر را خواهیم داشت:

$$sin\,x = \frac{۲z}{۱+z^۲} \quad , \quad cos\,x = \frac{۱-z^۲}{۱+z^۲} \quad , \quad dx = \frac{۲\,dz}{۱+z^۲}$$

مثال ۵: انتگرال‌های زیر به روش تغییر متغیر وایرشتراس حل شده‌اند.

۱) $$\int \frac{dx}{۱+cos\,x} = \int \frac{۱}{۱+\frac{۱-z^۲}{۱+z^۲}}\,\frac{۲\,dz}{۱+z^۲} = \int dz = z + c = tan(\frac{x}{۲}) + c$$

۲) $$\int \frac{dx}{۲+sin\,x+cos\,x} = \int \frac{۱}{۲+\frac{۲z}{۱+z^۲}+\frac{۱-z^۲}{۱+z^۲}}\,\frac{۲\,dz}{۱+z^۲} = \int \frac{۲\,dz}{z^۲+۲z+۳}$$

$$= ۲\int \frac{dz}{(z+۱)^۲+(\sqrt{۲})^۲} = \frac{۲}{\sqrt{۲}}tan^{-۱}(\frac{z+۱}{\sqrt{۲}}) + c$$

$$= \sqrt{۲}\,tan^{-۱}\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}(tan\frac{x}{۲} + ۱)\right) + c$$

۳) $$\int sec\,x\,dx = \int \frac{۱}{cos\,x}dx = \int \frac{۱+z^۲}{۱-z^۲}\,\frac{۲\,dz}{۱+z^۲}$$

$$= \int \frac{۲dz}{۱-z^۲} = \int (\frac{۱}{۱+z} + \frac{۱}{۱-z})dz = \int \frac{dz}{۱+z} + \int \frac{dz}{۱-z}$$

$$= Ln|۱ + z| - Ln|۱ - z| + c$$

$$= Ln\left|۱ + tan\frac{x}{۲}\right| - Ln\left|۱ - tan\frac{x}{۲}\right| + c$$

$$= Ln\left|\frac{۱+tan\frac{x}{۲}}{۱-tan\frac{x}{۲}}\right| + c = Ln\left|tan(\frac{\pi}{۴} + \frac{x}{۲})\right| + c$$

نکته: به کمک روابط مثلثاتی می‌توان نشان داد که: $sec\,x + tan\,x = tan(\frac{\pi}{۴} + \frac{x}{۲})$

بنابراین داریم: $\int sec\,x\,dx = Ln\left|tan(\frac{\pi}{۴} + \frac{x}{۲})\right| + c = Ln|sec\,x + tan\,x| + c$

لذا اگر عمل انتگرال‌گیری نسبت به عمل مشتق گیری دشوارتر است. برای پیدا کردن مشتق یک تابع، واضح است که کدام فرمول مشتق‌گیری باید به کار برده شود؛ ولی در انتگرال‌گیری از یک تابع، ممکن است واضح نباشد کدام روش را باید به کار ببریم. ضمن اینکه بعضی از انتگرال‌ها با شگردهای خاصی قابل حل هستند و بعضی از انتگرال‌ها برحسب **توابع مقدماتی** (توابع فصل یکم) قابل حل نمی‌باشند. بنابراین باید توجه داشت که قاعده محکم و سریعی که به ما بگوید در محاسبه یک انتگرال چه قانون یا روشی را به کار گیریم وجود ندارد. تمرین و تکرار زیاد در حل مسئله‌های انتگرال‌گیری، تجربه‌ای را نصیب فرد می‌کند که بر اساس آن می‌تواند برای حل هر انتگرال، روش قابل قبولی را اتخاذ کند.

مثال ۶: محاسبه $\int sec\,x\,dx$ را در مثال قبل به روش وایرشتراس مشاهده کردید. این انتگرال با شگرد زیر نیز قابل حل است.

$$\int sec\,x\,dx = \int sec\,x\,\frac{sec\,x+tan\,x}{sec\,x+tan\,x}dx = \int \frac{sec^۲\,x+sec\,x\,tan\,x}{sec\,x+tan\,x}dx$$

$$u = sec\,x + tan\,x \rightarrow du = (sec\,x\,tan\,x + sec^۲\,x)\,dx$$

$$\int sec\,x\,dx = \int \frac{du}{u} = Ln|u| + c = Ln|sec\,x + tan\,x| + c$$

به طور مشابه $\int csc\,x\,dx$ را می‌توان حل کرد و پاسخ آن به صورت زیر است:

$$\int csc\,x\,dx = Ln|csc\,x - cot\,x| + c$$

مثال ۷: ثابت می‌شود که $\int e^{x^۲}\,dx$ به کمک توابع مقدماتی قابل حل نمی‌باشد. این انتگرال به کمک سری تیلور تابع $e^{x^۲}$ در نقطه $x = ۰$ (سری ماکلورن $e^{x^۲}$) قابل حل است. بنابر مطالب بخش ۴-۶ داریم:

$$e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \cdots \rightarrow e^{x^۲} = ۱ + x^۲ + \frac{x^۴}{۲!} + \frac{x^۶}{۳!} + \cdots$$

$$\int e^{x^۲}\,dx = \int (۱ + x^۲ + \frac{x^۴}{۲!} + \frac{x^۶}{۳!} + \cdots)\,dx = x + \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۵}{۵\times۲!} + \frac{x^۷}{۷\times۳!} + \cdots$$

تمرین

۱- انتگرال‌های زیر را به روش تغییر متغیر مثلثاتی حل کنید.

۱) $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$ ۲) $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$

۳) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}dx$ ۴) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+9}}dx$

۵) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$ ۶) $\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-9}}dx$

۲- انتگرال‌های زیر را به روش تغییر متغیر وایرشتراس $(z=\tan\frac{x}{2})$ حل کنید.

۱) $\int \frac{1}{3\sin x-4\cos x}dx$ ۲) $\int \frac{1}{1-\sin x+\cos x}dx$

۳) $\int \csc x\,dx$ ۴) $\int \frac{1}{1+\sin x}dx$

۵) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$ ۶) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$

۷) $\int \frac{1}{\sin x+\tan x}dx$ ۸) $\int \frac{\sec x}{1+\sin x}dx$

۳- انتگرال‌های زیر به روش‌های عادی قابل حل نمی‌باشد، به کمک سری‌ها، آنها را حل کنید.

۱) $\int \frac{\sin x}{x}dx$ ۲) $\int \frac{1-\cos x}{x}dx$

۳) $\int \cos x^2\,dx$ ۴) $\int \sin x^2\,dx$

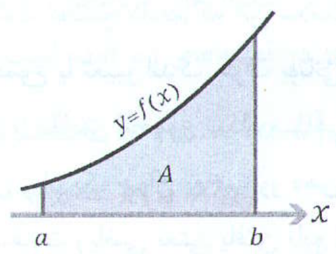
۵) $\int e^{-x^2}dx$ ۶) $\int e^{x^3}dx$

فصل ششم

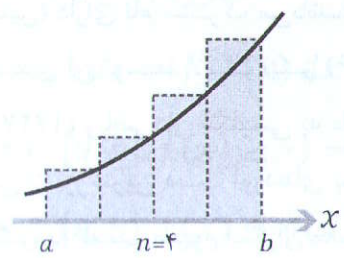
کاربرد انتگرال

۶-۱ انتگرال معین و قضیه‌های اساسی حساب

مقدمه: به دنبال پیدا کردن مساحت ناحیه‌ای با اضلاع خمیده هستیم و این کار آسانی نمی‌باشد. به خاطر آورید در فصل کاربرد مشتق، برای محاسبه شیب خط مماس بر منحنی، ابتدا شیب خط را توسط شیب خط‌های قاطع تقریب می‌زدیم، سپس حد این تقریب را محاسبه می‌کردیم، عدد حاصل شیب خط مماس بر منحنی بود. برای مساحت نیز روش مشابهی را دنبال می‌کنیم.



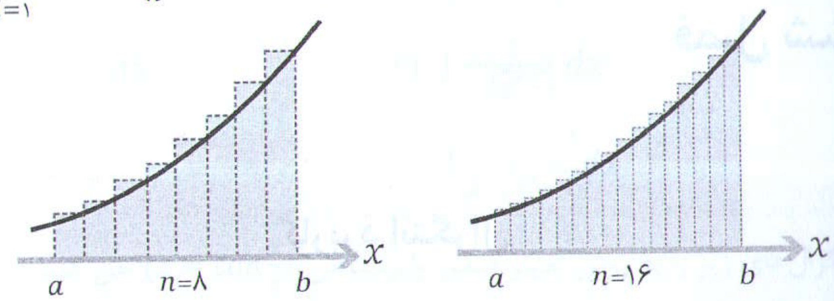
فرض کنید تابع f بر فاصله $[a,b]$ نامنفی باشد. می‌خواهیم مساحت محدود به منحنی تابع $y=f(x)$ و خطوط $x=a$ و $x=b$ و $y=0$ را محاسبه کنیم.



برای این منظور فاصله $[a,b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم کرده و با محاسبه مجموع مساحت مستطیل‌هایی که در شکل مقابل مشاهده می‌کنید می‌توان یک مقدار تقریبی برای مساحت ناحیه A پیدا کرد.

هر چقدر n را بیشتر اختیار کنیم، تقریب بهتری برای مساحت ناحیه A خواهیم داشت. با فرض $x_0 = a$، $x_n = b$ و $x_i = a + i(\frac{b-a}{n})$ که $i = ۰,۱,۲,\cdots,n$ مجموع مساحت این مستطیل‌ها به صورت مقابل است.

$$S = \sum_{i=۱}^{n} f(x_i)(\frac{b-a}{n})$$



در حالتی که n به سمت بی‌نهایت میل کند حالت حدی مجموع مساحت مستطیل‌ها، دقیقاً با مساحت ناحیه A برابر می‌شود. مقدار این حد را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

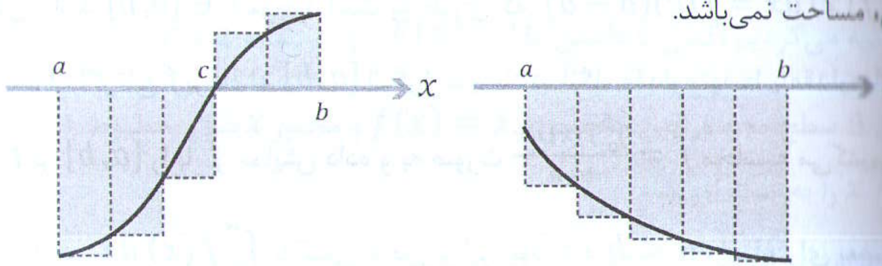
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=۱}^{n} f(x_i)(\frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(x)\,dx$$

این نمایش جدید برای حد فوق را **انتگرال معین** تابع f بر فاصله $[a,b]$ می‌گویند. هم‌چنین a و b را به ترتیب کران‌های پایین و بالای انتگرال می‌نامند.

با توجه به محاسبات فوق، اکنون ارتباط علامت $\int$ با کلمه «مجموع» مشخص می‌شود. در فصل گذشته توضیح دادیم که این علامت از کشیده شدن حرف S ابتدای کلمه Sum به معنی مجموع یا تغییر اندک حرف یونانی ς (سیگما) گرفته شده است. در ریاضی از حرف سیگما برای نمایش مجموع تعداد متناهی یا نامتناهی جملات استفاده می‌شود.

به احتمال زیاد یک سوال تعجب‌آور ذهن شما را به خود مشغول داشته و آن اینکه چرا دو موضوع متفاوت ریاضی یعنی یافتن تابع اولیه (انتگرال نامعین) و حد مجموع مساحت‌ها (انتگرال‌معین) دارای نام مشترک می‌باشند؟ ارتباط این دو بسیار شگفت‌انگیز است و کشف و فرمول‌بندی آن توسط لایب نیتز (۱۶۴۶-۱۷۱۶) ریاضی‌دان آلمانی و ایزاک نیوتن (۱۶۴۲-۱۷۲۷) ریاضی‌دان انگلیسی به طور هم زمان ولی مستقل از یکدیگر انجام شده و آن را یکی از بزرگترین دست آوردهای بشر محسوب می‌کنند. قبل از بیان این ارتباط شگفت‌انگیز، به تعمیم مفهوم انتگرال معین و چند خاصیت مهم آن می‌پردازیم.

تعمیم مفهوم انتگرال معین : اگر تابع f بر فاصله $[a,b]$ نامثبت یا به عبارت دیگر نمودار تابع زیر محور xها باشد، عدد مربوط به حد مجموع مساحت مستطیل‌ها را منفی در نظر می‌گیریم، و اگر قسمتی از منحنی بالای محور xها و قسمتی دیگر زیر محور باشد حد مجموع مساحت مستطیل‌های هر قسمت را جداگانه حساب و با هم جمع می‌کنیم، عدد حاصل ممکن است صفر، مثبت و یا منفی به دست آید. در این حالت دیگر تعبیر انتگرال معین، مساحت نمی‌باشد.



هرگاه حد مجموع مساحت‌ها موجود باشد گوییم تابع f بر فاصله $[a,b]$ **انتگرال‌پذیر** است، یا به عبارت دیگر $\int_a^b f(x)\,dx$ موجود است. حال این سوال پیش می‌آید که کدام توابع انتگرال‌پذیرند؟ قسمتی از جواب این سوال توسط قضیه زیر داده شده است.

قضیه ۱: اگر تابع f بر فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه بر این فاصله انتگرال‌پذیر خواهد بود.

تذکر: ما در این بخش فقط با توابع پیوسته کار خواهیم کرد و انتگرال معین از بعضی توابع ناپیوسته را در بخش سوم این فصل تحت عنوان انتگرال‌های غیرعادی مورد بررسی قرار خواهیم داد. بعضی از خواص توابع انتگرال‌پذیر در قضیه‌های زیر آمده است.

قضیه ۲: هرگاه f و g توابع انتگرال‌پذیر بر فاصله $[a,b]$ باشند و $k \in \mathbb{R}$ داریم:

۱) $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$ ‏ ‏ ‏ ۲) $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

۳) $\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

۴) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad (a < c < b)$

۵) $(\forall x \in [a,b]: f(x) \geq ۰) \to \int_a^b f(x)\,dx \geq ۰$

۶) $(\forall x \in [a,b]: f(x) \leq g(x)) \to \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

قضیه ۳: اگر تابع f بر فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد، دارای ماکزیمم و می‌نیمم مطلقی مانند M و m است و داریم:

$$(\forall x \in [a,b]: m \leq f(x) \leq M) \rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

قضیه ۴ (قضیه مقدار میانگین برای انتگرال‌ها): اگر تابع f بر فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد عددی مانند $c \in [a,b]$ موجود است به طوری که: $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

تعریف ۱: اگر تابع f بر فاصله $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه **مقدار متوسط** یا **مقدار میانگین** تابع f بر $[a,b]$ را با $\bar{f}$ نمایش داده و به صورت $\bar{f} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ محاسبه می‌کنیم.

تذکر ۱: در $\int_a^b f(x)\,dx$ تا کنون فرض بر این بود که $a < b$، اما برای بعضی از اهداف مفید است که انتگرال معین را برای حالتی که $a = b$ یا $a > b$ باشد به صورت زیر تعمیم دهیم:

$$\int_a^a f(x)\,dx = ۰ \quad , \quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad (a \neq b)$$

تذکر ۲: محاسبه انتگرال معین به کمک حد نیازمند مقدمات، اطلاعات و فرصت بیشتری است، ضمن اینکه کار ساده‌ای نیز نمی‌باشد. ما در این کتاب وارد بحث محاسبه انتگرال معین به وسیله حد نمی‌شویم. قضیه‌های زیر ضمن بیان ارتباط حد مجموع مساحت‌ها با تابع اولیه، محاسبه این حد را بسیار ساده می‌کند. سودمندی این قضیه‌ها به اندازه‌ای است که اغلب آنها را قضیه‌های اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال نامیده‌اند.

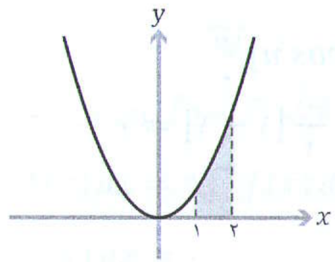
قضیه ۵ (اولین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال): اگر تابع f بر فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه تابع $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ که $a \leq x \leq b$، بر فاصله $[a,b]$ پیوسته و بر فاصله (a,b) مشتق‌پذیر است و $F'(x) = f(x)$

تذکر ۳: توضیح بیشتر و مثال برای اولین قضیه اساسی حساب در پایان این بخش آمده است.

قضیه ۶ (دومین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال): اگر تابع f بر فاصله $[a,b]$ پیوسته و F یک تابع اولیه برای f باشد، آنگاه: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

نکته ۱: قضیه اول وجود تابع F را در قضیه دوم تضمین می‌کند و قضیه دوم بیان می‌کند که می‌توان $\int_a^b f(x)\,dx$ را به سادگی با کم کردن مقادیر $F(x)$ در نقاط ابتدا و انتهای فاصله $[a,b]$ به‌دست آورد. خیلی حیرت‌آور است که $\int_a^b f(x)\,dx$ را که به روشی پیچیده و با استفاده از کلیه مقادیر $f(x)$ به ازای $a \leq x \leq b$ باید محاسبه می‌کردیم اکنون با داشتن مقادیر $F(x)$ تنها در نقاط a و b پیدا می‌کنیم.

مثال ۱: سطح محصور بین منحنی $f(x) = x^۲$ و محور xها و خطوط $x = ۱$ و $x = ۲$ را به‌دست آورید.



حل: برای این منظور باید $\int_۱^۲ x^۲\,dx$ را محاسبه کنیم.

$$F(x) = \int x^۲\,dx = \tfrac{۱}{۳}x^۳ + c$$

$$S = \int_۱^۲ x^۲\,dx = F(۲) - F(۱)$$

$$= (\tfrac{۸}{۳} + c) - (\tfrac{۱}{۳} + c) = \tfrac{۷}{۳}$$

نکته ۲: همان‌طور که در مثال فوق مشاهده می‌کنید در محاسبه انتگرال معین، مقدار ثابت c حذف می‌شود. لذا در انتگرال‌های معین، مقدار ثابت c را نمی‌نویسیم. برای اختصار محاسبه انتگرال معین را به یکی از صورت‌های زیر نمایش می‌دهیم.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

مثال ۲: انتگرال‌های معین زیر به کمک قضیه دوم حساب دیفرانسیل حل شده‌اند.

۱) $\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_۰^{\frac{\pi}{۲}} = \sin\frac{\pi}{۲} - \sin ۰ = ۱ - ۰ = ۱$

۲) $\int_۰^۱ \frac{۱}{۱+x^۲}\,dx = \tan^{-۱} x\Big|_۰^۱ = \tan^{-۱} ۱ - \tan^{-۱} ۰ = \frac{\pi}{۴} - ۰ = \frac{\pi}{۴}$

۳) $\int_{Ln ۶}^{Ln ۸} ۵e^u\,du = ۵e^u\Big|_{Ln ۶}^{Ln ۸} = ۵(e^{Ln ۸} - e^{Ln ۶}) = ۵(۸ - ۶) = ۱۰$

نکته ۳: هنگامی که در محاسبه انتگرال معین از روش تغییر متغیر استفاده می‌کنیم باید کران‌های انتگرال را نیز تغییر دهیم. در چنین حالتی انتگرال معین را با همان متغیر جدید محاسبه کرده و نیازی به برگشت و کار با متغیر اولیه نمی‌باشد.

مثال ۳: انتگرال‌های معین زیر به کمک قضیه دوم حساب دیفرانسیل و به کمک روش تغییر متغیر حل شده‌اند.

۱) $\int_1^2 (2x-1)^3\,dx = \frac{1}{2}\int_1^3 u^3\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^3 = \frac{1}{8}[3^4 - 1^4] = 10$

$u = 2x-1 \to du = 2\,dx \to dx = \frac{1}{2}du$

$\begin{cases} x = 1 \to u = 1 \\ x = 2 \to u = 3 \end{cases}$

۲) $\int_0^\pi \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin u\,du = \frac{1}{2}[-\cos u]_0^{2\pi}$

$= \frac{-1}{2}[\cos 2\pi - \cos 0] = \frac{-1}{2}[1-1] = 0$

$u = 2x \to du = 2\,dx \to dx = \frac{1}{2}du$

$\begin{cases} x = 0 \to u = 0 \\ x = \pi \to u = 2\pi \end{cases}$

نکته ۴: برای محاسبه انتگرال معین یک تابع پیوسته چند ضابطه‌ای، انتگرال معین را به صورت مجموع چند انتگرال معین می‌نویسیم. لازم به تذکر است بررسی انتگرال از توابع چند ضابطه‌ای غیر پیوسته مانند $\int_0^3 [x]\,dx$ در بخش سوم همین فصل انجام می‌شود.

مثال ۴: در انتگرال‌های معین زیر، تابع زیر انتگرال چند ضابطه‌ای و پیوسته می‌باشد.

$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ x^2+1 & x < 1 \end{cases}$

۱) $\int_{-1}^2 f(x)\,dx = \int_{-1}^2 |x|\,dx = \int_{-1}^0 -x\,dx + \int_0^2 x\,dx$

$= \left[\frac{-1}{2}x^2\right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$

۲) $\int_{-1}^2 g(x)\,dx = \int_{-1}^1 (x^2+1)dx + \int_1^2 2x\,dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^1 + [x^2]_1^2 = \frac{8}{3} + 3 = \frac{17}{3}$

نکته ۵: در محاسبه انتگرال معین به روش جزءبه‌جزء یا تجزیه کسرها، ابتدا تابع اولیه را به کمک انتگرال نامعین به دست آورده سپس انتگرال معین را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۵: انتگرال‌های معین زیر به کمک روش جزءبه‌جزء و تجزیه کسرها محاسبه شده است.

۱) $\int_0^1 xe^x\,dx = [xe^x - e^x]_0^1 = (e-e) - (0-1) = 1$

(انتگرال فوق به روش جزء به جزء حل شده است: $u = x\ , dv = e^x\,dx\ , \ldots$)

۲) $\int_1^2 \frac{3}{x^2+3x}\,dx = \int_1^2 (\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3})dx = [Ln|x| - Ln|x+3|\,]_1^2$

$= (Ln\,2 - Ln\,5) - (Ln\,1 - Ln\,4) = Ln(\frac{8}{5})$

(انتگرال فوق به روش تجزیه کسرها حل شده است: $\frac{3}{x^2+3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3}\ , \ldots$)

نکته ۶: فرض کنید تابع f بر فاصله $[-a,a]$ انتگرال‌پذیر است. اگر تابع f روی این فاصله:

الف) زوج باشد یعنی $f(-x) = f(x)$، آنگاه داریم: $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

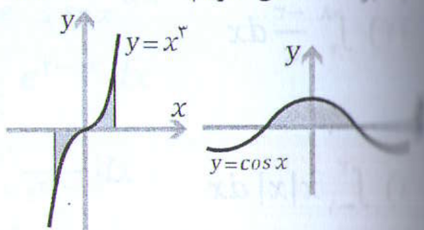
ب) فرد باشد یعنی $f(-x) = -f(x)$، آنگاه داریم: $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

مثال ۶: توابع $f(x) = \cos x$ و $g(x) = x^3$ بر $\mathbb{R}$ به ترتیب زوج و فرد می‌باشند، لذا بنا بر نکته قبل داریم:

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

$= 2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2(1-0) = 2$

$\int_{-2}^2 g(x)\,dx = \int_{-2}^2 x^3\,dx = 0$



مثال ۷: مقدار متوسط تابع $f(x) = 2x$ را بر فاصله $[1,5]$ بیابید. سپس نقطه $c \in [1,5]$ را پیدا کنید که $\bar{f} = f(c)$.

حل: با توجه به تعریف مقدار متوسط تابع ($\bar{f} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$) داریم:

$\bar{f} = \frac{\int_1^5 2x\,dx}{5-1} = \frac{1}{4}x^2\Big|_1^5 = \frac{1}{4}(25-1) = 6\ ,\ \bar{f} = f(c) \to 6 = 2c \to c = 3$

تمرین

۱- حاصل انتگرال‌های معین زیر را بیابید.

۱) $\int_{-1}^{4} 5\,dx$

۲) $\int_{2}^{5}(2x-3)\,dx$

۳) $\int_{1}^{8}\sqrt[3]{t}\,dt$

۴) $\int_{1}^{4} t^{-2}\,dt$

۵) $\int_{1}^{0}(x-2)(2x+1)\,dx$

۶) $\int_{0/5}^{0}(4x^2-4x+1)\,dx$

۷) $\int_{1}^{2}(x+\frac{1}{x})^2\,dx$

۸) $\int_{-1}^{0}(x^3-1)^2\,dx$

۹) $\int_{1}^{4}\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\,dx$

۱۰) $\int_{0}^{8}\sqrt[3]{x}\,(x-1)\,dx$

۱۱) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt$

۱۲) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos t\,dt$

۱۳) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x\,dx$

۱۴) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\csc^2 x\,dx$

۱۵) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\csc x\cot x\,dx$

۱۶) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}\sec x\tan x\,dx$

۱۷) $\int_{0}^{0/5}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

۱۸) $\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}\,dx$

۱۹) $\int_{0}^{Ln\,2} 3e^u\,du$

۲۰) $\int_{Ln\,3}^{Ln\,6} 2e^x\,dx$

۲۱) $\int_{0}^{2} 2^x\,dx$

۲۲) $\int_{-2}^{0} 5^u\,du$

۲۳) $\int_{4}^{8}\frac{-3}{x}\,dx$

۲۴) $\int_{e^{-1}}^{e}\frac{2}{x}\,dx$

۲- حاصل انتگرال‌های معین زیر را بیابید.

۱) $\int_{-1}^{2} x|x|\,dx$

۲) $\int_{0}^{3}|x-2|\,dx$

۳) $\int_{0}^{2}|x^2-1|\,dx$

۴) $\int_{-1}^{1}|x-x^2|\,dx$

۵) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \quad , \quad f(x)=\begin{cases} x & -\pi\le x\le 0 \\ \sin x & 0\le x\le \pi \end{cases}$

۶) $\int_{0}^{e^2} g(x)\,dx \quad , \quad g(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & 1\le x \\ 2x-1 & x\le 1 \end{cases}$

۴- حاصل انتگرال‌های معین زیر را بیابید.

۱) $\int_{0}^{1}(2x-1)^5\,dx$

۲) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{(2t+3)^2}\,dt$

۳) $\int_{1}^{5}\sqrt{2t-1}\,dt$

۴) $\int_{-2}^{6}\sqrt[3]{x+2}\,dx$

۵) $\int_{1}^{\sqrt{7}}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx$

۶) $\int_{0}^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}\,dx$

۷) $\int_{-1}^{2} x\sqrt{x+2}\,dx$

۸) $\int_{0}^{15}\frac{x}{\sqrt[4]{(1+x)^3}}\,dx$

۹) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin 3x\,dx$

۱۰) $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx$

۱۱) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3x\,dx$

۱۲) $\int_{0}^{\frac{\pi}{8}}\sin^2 2x\,dx$

۱۳) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$

۱۴) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot x\,dx$

۱۵) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{4x^2+1}\,dx$

۱۶) $\int_{-\frac{1}{4}}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

۱۷) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{3-2x}\,dx$

۱۸) $\int_{1}^{3}\frac{2}{t+1}\,dt$

۱۹) $\int_{0}^{Ln\,3}\frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

۲۰) $\int_{e}^{e^2}\frac{1}{x\,Ln\,x}\,dx$

۲۱) $\int_{1}^{2} x^2 e^{x^3-1}\,dx$

۲۲) $\int_{\frac{1}{5}}^{1} e^{2-5x}\,dx$

۲۳) $\int_{-1}^{2} t\,2^{t^2}\,dt$

۲۴) $\int_{0}^{1}\frac{2}{5^{2x-1}}\,dx$

۲۵) $\int_{1}^{e} x\,Ln\,x\,dx$

۲۶) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$

۲۷) $\int_{1}^{3}\frac{1}{x(x+2)}\,dx$

۲۸) $\int_{2}^{4}\frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)}\,dx$

۹) $(۱ + \sqrt{۳}i)^{۱۰}$

۱۰) $(\sqrt{۳} - i)^{۱۲}$

۱۱) $\left(\frac{۱-i}{۱+\sqrt{۳}i}\right)^{۴}$

۱۲) $\left(\frac{۱-i}{۱+i}\right)^{۶}$

۱۳) $(cis\ ۸^\circ)^{۱۰} \div (cis\ ۵^\circ)^{۴}$

۱۴) $(\sqrt{۲}\ cis\ ۷۵^\circ)^{۴}\ (۲\ cis\ ۳۶^\circ)^{۵}$

۵- با فرض $z = ۲e^{\frac{\pi}{۴}i}$ و $w = ۳e^{\frac{\pi}{۱۲}i}$ حاصل عبارات زیر را بیابید.

۱) wz

۲) $\frac{۲w}{۳z}$

۳) $w^۲z^۲$

۴) $z^۴w^۳$

۵) $Ln\,z$

۶) $Ln\,w$

۶- معادلات زیر را در مجموعه اعداد مختلط حل کنید.

۱) $x^۲ - ۲x + ۲ = ۰$

۲) $x^۲ + ۴x + ۵ = ۰$

۳) $x^۲ + ۲ix + ۳ = ۰$

۴) $x^۲ + (۲ + i)x + i = ۰$

۵) $x^۳ - ۲۷ = ۰$

۶) $x^۳ + ۸ = ۰$

۷) $x^۳ + x^۲ + ۸x - ۱۰ =$

۸) $x^۳ + ۲x^۲ + ۴x + ۸ = ۰$

۹) $x^۴ + ۲x^۲ - ۳ = ۰$

۱۰) $x^۴ + ۴x^۲ + ۳ = ۰$

۷- ریشه‌های nام عدد داده شده را بیابید.

۱) $i \quad , \quad n = ۲$

۲) $-۸ \quad , \quad n = ۳$

۳) $۱ + i \quad , \quad n = ۴$

۴) $۱ - i \quad , \quad n = ۴$

۵) $-۳۲ \quad , \quad n = ۵$

۶) $۱ - \sqrt{۳}i \quad , \quad n = ۴$

۷) $-۱ - \sqrt{۳}i \quad , \quad n = ۶$

۸) $i \quad , \quad n = ۶$

فصل هشتم

پاسخ کوتاه تمرین‌ها

فصل یکم: تـــابـــع

تمرین‌های صفحه ۱۴ :

۱/۱) $f = \{(۴,۱), (۵,۲), (۶,۳), \cdots\} \quad , \quad D_f = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \geq ۴\}$

۱/۲) $f = \{(-۱,۱), (-۴,۲), (-۹,۳), \cdots\} \quad , \quad D_f = \{-x^۲ \mid x \in \mathbb{N}\}$

۱/۳) $f = \left\{(۰,\frac{۱}{۴}), (۱,۰), (-۱,\frac{۲}{۳}), \cdots\right\} \quad , \quad D_f = \mathbb{Z} - \{\pm ۲\}$

۱/۴) $f = \left\{(۰,۱), (۱,۰), (-۱,\frac{۲}{۳}), \cdots\right\} \quad , \quad D_f = \mathbb{Z} - \left\{\frac{۱}{۲}\right\} = \mathbb{Z}$

۲/۱) $\mathbb{R} - \left\{\frac{۳}{۲}\right\}$

۲/۲) $\mathbb{R}$

۲/۳) $(-\infty, ۰] \cup [۳, +\infty)$

۲/۴) $[۳, +\infty) - \{۵\}$

۲/۵) $\emptyset$

۲/۶) $(-\infty, -۲) \cup [۰, ۲)$

۲/۷) $(-\infty, -۳) \cup (۳, +\infty)$

۲/۸) $[-۱, +\infty) - \{۰\}$

۲/۹) $\mathbb{R} - \{۰, ۱\}$

۲/۱۰) $[-۲, ۲]$

۲/۱۱) $(-\infty, -۲] \cup [۴, +\infty)$

۲/۱۲) $\mathbb{R} - \{-۲, ۳\}$

۲/۱۳) $\mathbb{R} - \{\pm ۳\}$

۲/۱۴) $[-۱, ۲) \cup (۲, +\infty)$

۲/۱۵) $(-۱,۱)$

۲/۱۶) $\{x \mid x \neq ۲k\pi \,,\; k \in \mathbb{Z}\}$

۲/۱۷) $\left\{x \mid x \neq ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} \,,\; x \neq ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۶} \,,\; k \in \mathbb{Z}\right\}$

۲/۱۸) $\left\{x \mid x \neq k\pi \pm \frac{\pi}{۴} \,,\; k \in \mathbb{Z}\right\}$

۳/۱) دو تابع f و g نامساویند، زیرا: $D_g = \mathbb{R}$ و $D_f \neq \mathbb{R}$، چون $f(۰)$ تعریف نمی‌شود.

۳/۲) دو تابع f و g نامساویند، زیرا: $D_g = \mathbb{R} - \{۰, \pm ۲\}$ و $D_f = \mathbb{R} - \{\pm ۲\}$

۳/۳) دو تابع f و g مساویند، زیرا: $D_f = D_g = \mathbb{R}$ و $f(x) = g(x) = |x - ۲|$

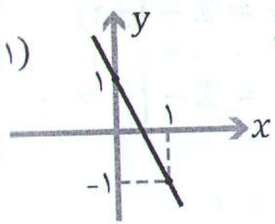
۳/۴) دو تابع f و g مساویند، زیرا: $D_f = D_g = \mathbb{R}$ و $f(x) = g(x) = \cos^۲ x$

۳/۵) دو تابع f و g نامساویند، زیرا: $D_g = (-\infty, -۱] \cup [۰, +\infty)$ و $D_f = [۰, +\infty)$

۳/۶) دو تابع f و g مساویند، زیرا: $D_f = D_g = [۰, +\infty)$ و $f(x) = g(x) = \sqrt[۶]{x^۵}$

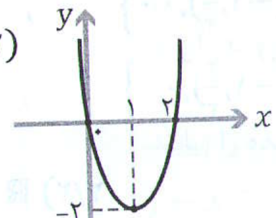
تمرین‌های صفحه ۲۲ :

۱/۱)



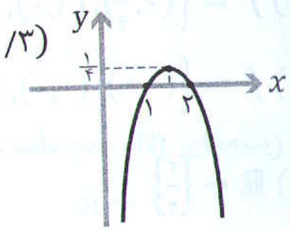
$R_f = \mathbb{R}$

۱/۲)



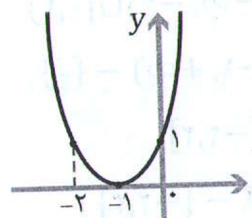
$R_f = [-۲, +\infty)$

۱/۳)



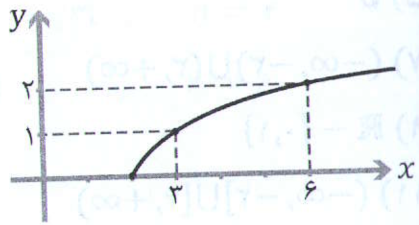
$R_f = (-\infty, \frac{۱}{۴}]$

۱/۴)



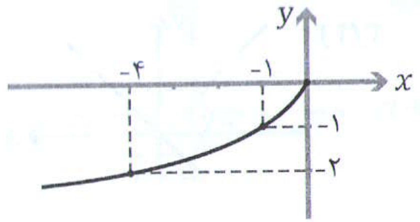
$R_f = [۰, +\infty)$

۱/۵)



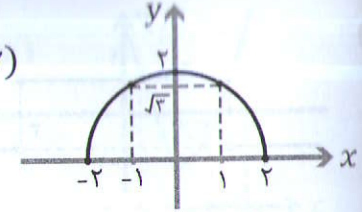
$R_f = [۰, +\infty)$

۱/۶)



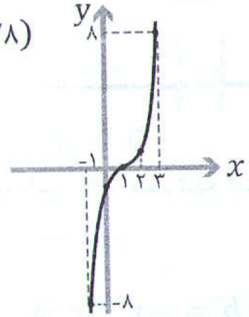
$R_f = (-\infty, ۰]$

۱/۷)



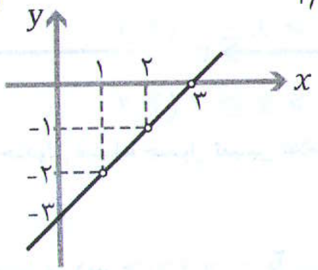
$R_f = [۰, ۲]$

۱/۸)



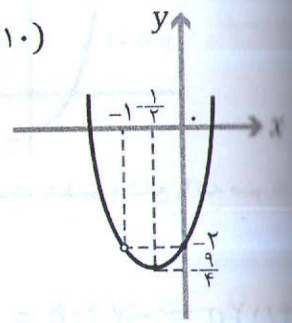
$R_f = \mathbb{R}$

۱/۹)



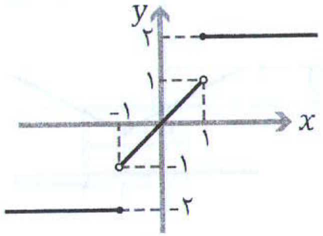
$R_f = \mathbb{R} - \{۰, -۱, -۲\}$

۱/۱۰)

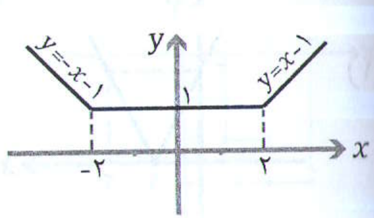


$R_f = [\frac{-۹}{۴}, +\infty)$

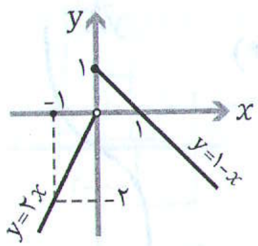
۲/۱)



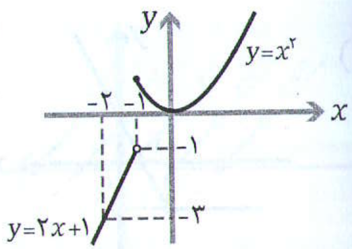
۲/۲)



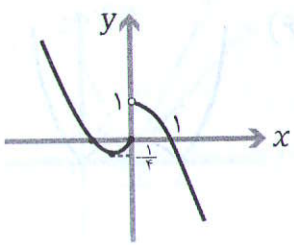
۲/۳)



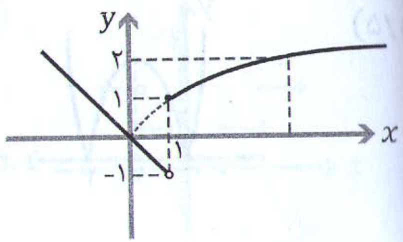
۲/۴)



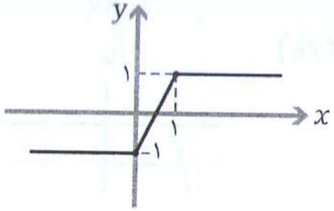
۲/۵)



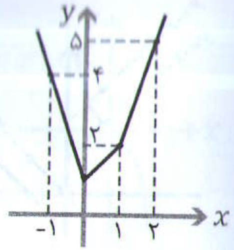
۲/۶)



۱/۷)



۱/۸)



راهنمایی: برای رسم توابع تمرین‌های ۱/۷ و ۱/۸ ، به کمک جدول تعیین علامت تابع را به صورت چندضابطه‌ای بنویسید.

۲/۱) $۲ \le x < ۲/۵$

۲/۲) $۱ \le x < ۳$

۲/۳) $M = \emptyset$

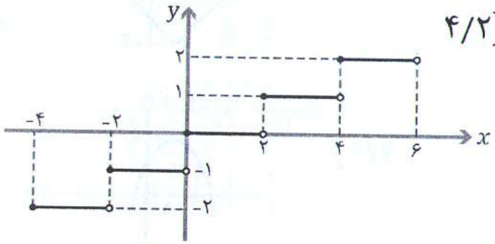
۲/۴) $۲ \le x < ۳$

۲/۵) $-۱ < x < ۱$

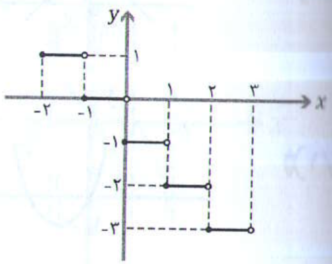
۲/۶) $۱ \le x < ۲$ یا $-۱ \le x < ۰$

۳/۱) $x \ge ۲$ ۳/۲) $x \ge -۱$ ۳/۳) $x < ۶$ ۳/۴) $x < -۵$

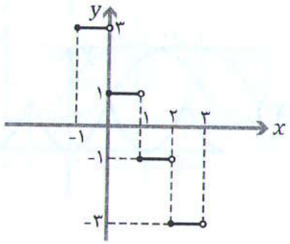
۴/۱)



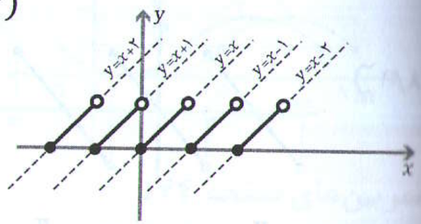
۴/۲)



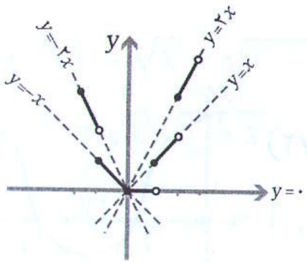
۴/۳)



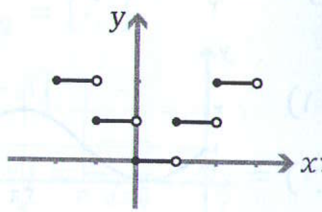
۴/۴)



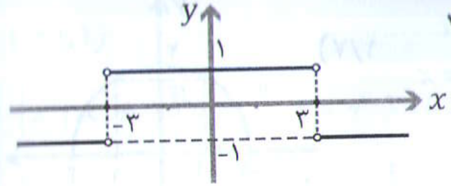
۴/۵)



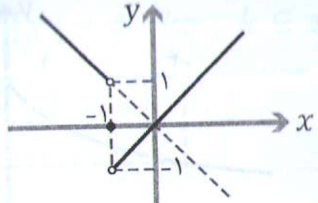
۴/۶)



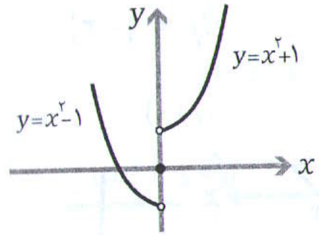
۴/۱)



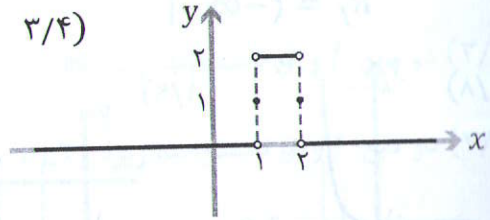
۳/۲)



۴/۳)



۳/۴)



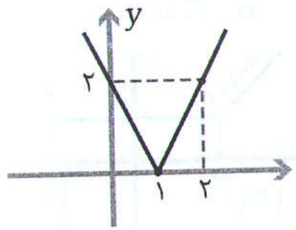
راهنمایی: برای رسم تابع تمرین ۳/۴ جدولی مشابه جدول تعیین علامت، تنظیم و تابع را به صورت چند ضابطه‌ای بنویسید.

۴/۱) $a = -۷ \ , \ b = -\frac{۳}{۲}$

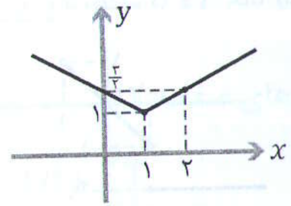
۴/۲) $a = -۲ \ , \ b = -۳ \ , \ c = ۱$

تمرین‌های صفحه ۳۴ :

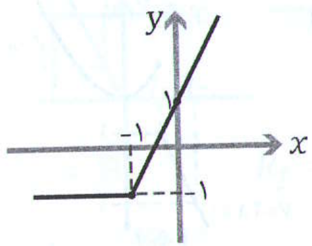
۱/۱)



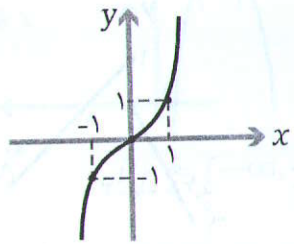
۱/۲)



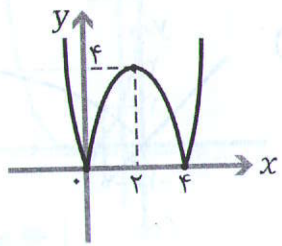
۱/۳)



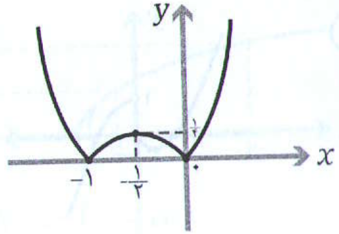
۱/۴)

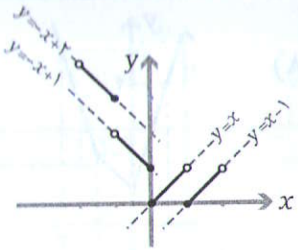


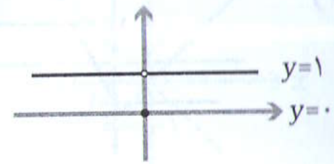
۱/۵)

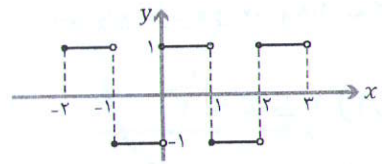


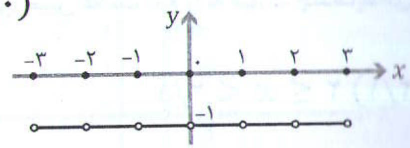
۱/۶)



۴/۷)


۴/۸)


۴/۹)


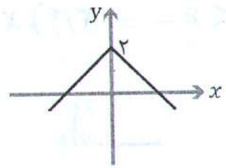
۴/۱۰)


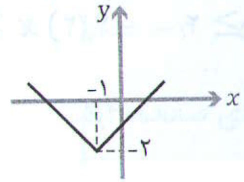
۵/۱) $(-\infty,-۱)\cup[۰,+\infty)$

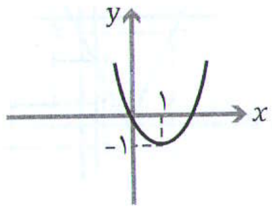
۵/۲) $\mathbb{R}$

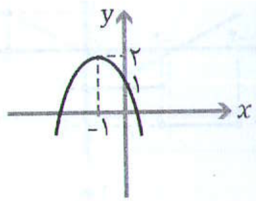
۵/۳) $[۳,+\infty)$

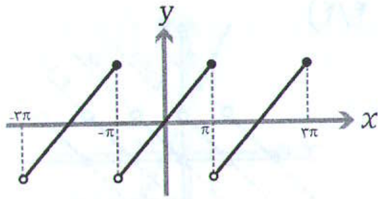
۵/۴) $(-\infty,۵)$

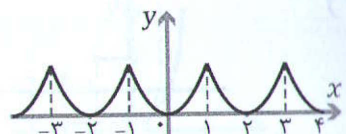
۶/۱)


۶/۲)


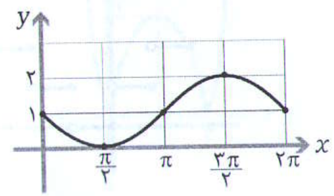
۷/۱)


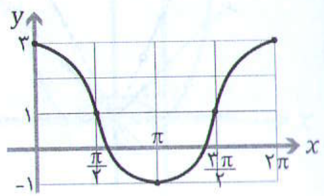
۷/۲)


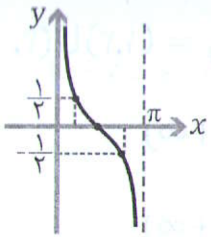
۸/۱)


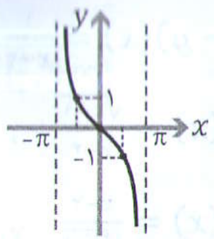
۸/۲)


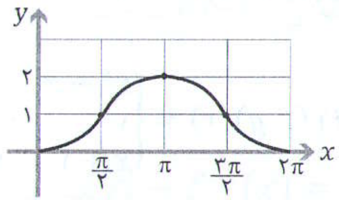
۹/۱) $T=\frac{\pi}{۲}$ ۹/۲) $T=\frac{\pi}{۲}$

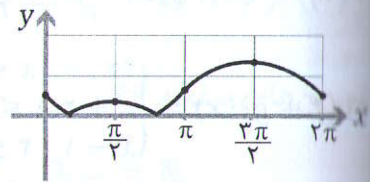
۱۰/۱)


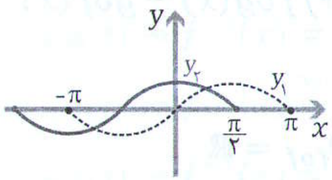
۱۰/۲)


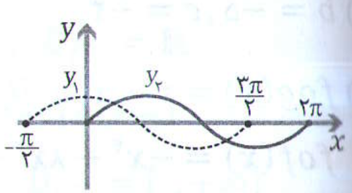
۱۰/۳)


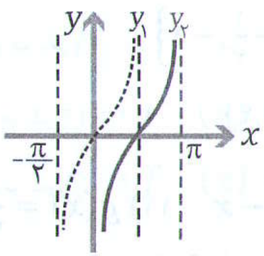
۱۰/۴)


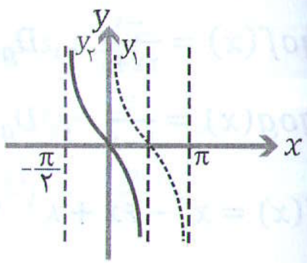
۱۰/۵)


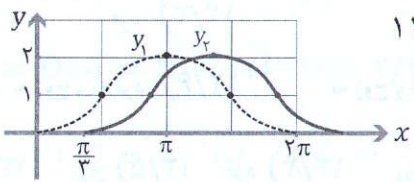
۱۰/۶)


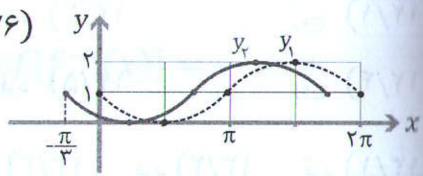
۱۱/۱)


۱۱/۲)


۱۱/۳)


۱۱/۴)


۱۱/۵)


۱۱/۶)


تمرین‌های صفحه ۴۴ :

۱) $(f+g)(x)=\sqrt{x}+\sqrt{۱-x}$, $D_{f+g}=[۰,۱]$

$(f.g)(x)=\sqrt{x}\sqrt{۱-x}$, $D_{f.g}=[۰,۱]$

$(\frac{f}{g})(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{۱-x}}$, $D_{\frac{f}{g}}=[۰,۱)$, $(\frac{g}{f})(x)=\frac{\sqrt{۱-x}}{\sqrt{x}}$, $D_{\frac{g}{f}}=(۰,۱]$

۲) $(f-g)(x)=\frac{۱}{x-۳}-\frac{۱}{\sqrt{x-۱}}$, $D_{f-g}=(۱,۳)\cup(۳,+\infty)$

$(\frac{f}{g})(x)=\frac{\sqrt{x-۱}}{x-۳}$, $D_{\frac{f}{g}}=(۱,۳)\cup(۳,+\infty)$

$(\frac{g}{f})(x)=\frac{x-۳}{\sqrt{x-۱}}$, $D_{\frac{g}{f}}=(۱,۳)\cup(۳,+\infty)$

۳) $(f+g)(x)=\begin{cases}۳x & x<۱\\ x+۲ & ۱\le x<۳\\ x-۱ & ۳\le x\end{cases}$ ۴) $(f.g)(x)=\begin{cases}x^۲-x & x\le ۱\\ ۱ & ۱<x\le ۲\\ x+۱ & ۲<x\end{cases}$

۵) $b=-۵\,,c=-۳$ ۶) $fog(x)-gof(x)=-۴$

۷) $fog(x)=۴-x$, $D_{fog}=[۰,+\infty)$

$fof(x)=-x^۴+۸x^۲-۱۲$, $D_{fof}=\mathbb{R}$

۸) $gof(x)=\frac{-۱}{۲x+۱}$, $D_{gof}=\mathbb{R}-\{-\frac{۱}{۲},-۱\}$

$gog(x)=\frac{x}{۴-x}$, $D_{gog}=\mathbb{R}-\{۲,۴\}$

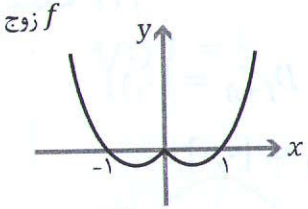
۹) $f(x)=x^۲-۶x+۸$ ۱۰) $f(x)=۱-x$ ۱۱) $g(x)=\frac{۱}{۲}x^۲+x+۱$

۱۲/۱) زوج ۱۲/۲) فرد ۱۲/۳) فرد

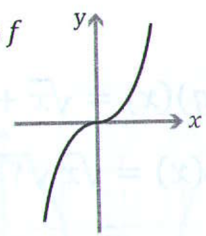
۱۲/۴) زوج ۱۲/۵) نه زوج و نه فرد ۱۲/۶) نه زوج و نه فرد

۱۳/۱) فرد ۱۳/۲) فرد ۱۳/۳) زوج ۱۳/۴) فرد ۱۳/۵) زوج ۱۳/۶) زوج

۱۴/۱) f زوج است

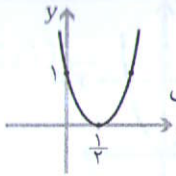


۱۴/۲) f فرد است

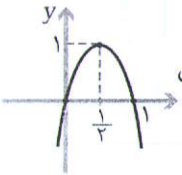


۱۵/۱) اکیداً نزولی ۱۵/۲) اکیداً صعودی ۱۵/۳) اکیداً صعودی ۱۵/۴) اکیداً نزولی

۱۶/۱) در فاصله $[\frac{۱}{۲},+\infty)$ اکیداً صعودی و در فاصله $(-\infty,\frac{۱}{۲}]$ اکیداً نزولی



۱۶/۲) در فاصله $[\frac{۱}{۲},+\infty)$ اکیداً نزولی و در فاصله $(-\infty,\frac{۱}{۲}]$ اکیداً صعودی



تمرین‌های صفحه ۴۹ :

۱/۱) (f یک به یک است) $\to f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۵}(x+۳)$, $D_{f^{-۱}}=\mathbb{R}$

۱/۲) (f یک به یک است) $\to f^{-۱}(x)=۴-\sqrt[۳]{x}$, $D_{f^{-۱}}=\mathbb{R}$

۱/۳) (f یک به یک است) $\to f^{-۱}(x)=x^۲$, $D_{f^{-۱}}=[۰,+\infty)$

۱/۴) (f یک به یک است) $\to f^{-۱}(x)=\sqrt{x}+۱$, $D_{f^{-۱}}=[۰,+\infty)$

۱/۵) (f یک به یک نیست) ۱/۶) (f یک به یک نیست)

۱/۷) (f یک به یک است) $\to f^{-۱}(x)=\sqrt{۹-x^۲}$, $D_{f^{-۱}}=[۰,۳)$

۱/۸) (f یک به یک است) $\to f^{-۱}(x)=x^۳-۲$, $D_{f^{-۱}}=\mathbb{R}$

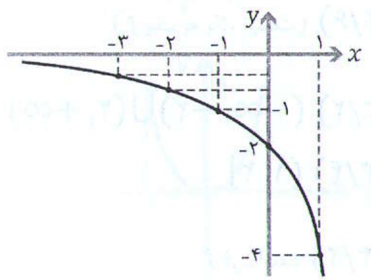
۲/۱) f یک به یک است ۲/۲) $f^{-۱}(x)=\frac{x}{۲-x}$ (عملیات ۲/۱ و ۲/۲ مشابه مثال ۳ صفحه ۴۸)

۲/۳) $R_f=D_{f^{-۱}}=\mathbb{R}-\{۲\}$ ۲/۴) $f[f^{-۱}(x)]=\cdots=x$

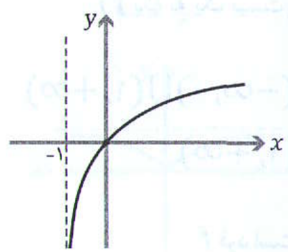
۳) $(fog)^{-۱}(x)=g^{-۱}of^{-۱}(x)=\frac{۷-x}{۴}$

تمرین‌های صفحه ۵۶ :

۱/۱)



۱/۲)



۵/۱) درست   ۵/۲) درست   ۵/۳) درست   ۵/۴) درست   ۵/۵) درست   ۵/۶) درست

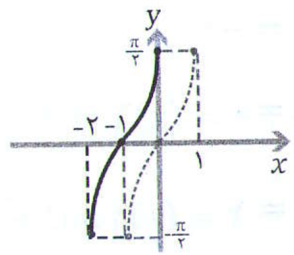
تمرین‌های صفحه ۶۲ :

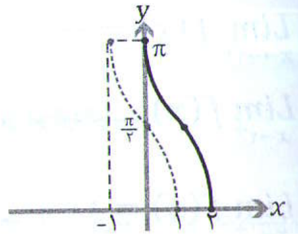
۱/۱) $۰ , \frac{\pi}{۶} , \frac{-\pi}{۳}$ ۱/۲) $\frac{۲\pi}{۳} , ۰ , \frac{\pi}{۶}$

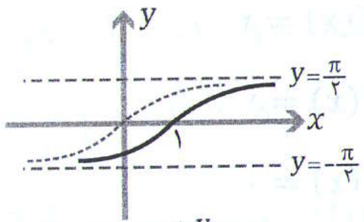
۱/۳) $\frac{-\pi}{۴} , \frac{\pi}{۶} , ۰$ ۱/۴) $\frac{\pi}{۴} , \frac{۲\pi}{۳} , \frac{\pi}{۲}$

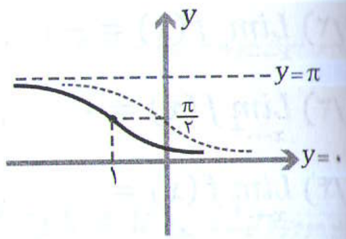
۲/۱) $[۱,۲]$ ۲/۲) $[-۳,۱]$ ۲/۳) $(-\infty,-۲]\cup[۰,+\infty)$

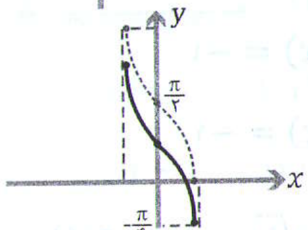
۲/۴) $[-\frac{۱}{۲},+\infty)$ ۲/۵) $\mathbb{R}$ ۲/۶) $\mathbb{R}$ ۲/۷) $[۰,۱]$ ۲/۸) $[۲,+\infty)$

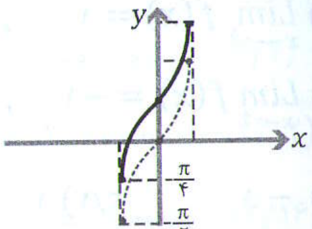
۳/۱)


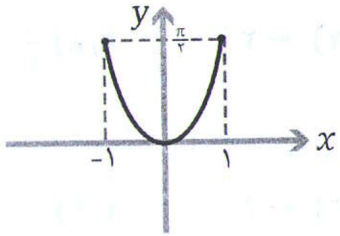
۳/۲)


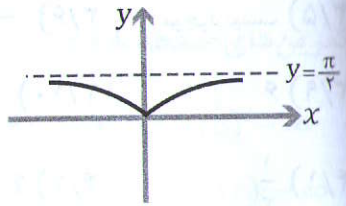
۳/۳)


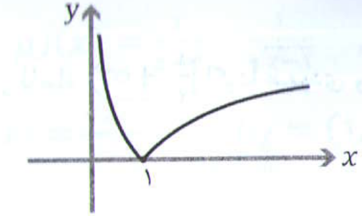
۳/۴)


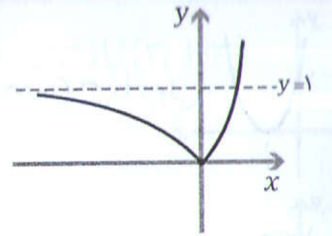
۳/۵)


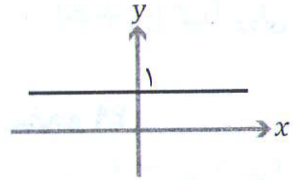
۳/۶)


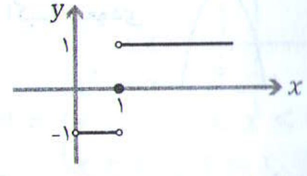
۴/۱)


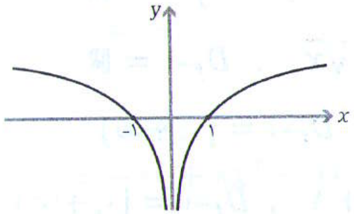
۴/۲)


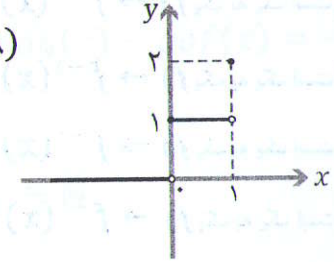
۱/۳)


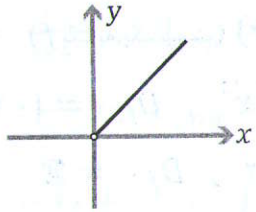
۱/۴)


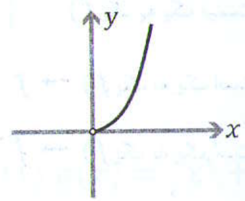
۱/۵)


۱/۶)


۱/۷)


۱/۸)


۱/۹)


۱/۱۰)


۲/۱) (f یک به یک است) $\rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۱}{۳}[(Log_۲ x) - ۱]$

۲/۲) (f یک به یک است) $\rightarrow f^{-۱}(x) = - Ln(x+۱)$

۲/۳) (f یک به یک است) $\rightarrow f^{-۱}(x) = e^{x-۲}$

۲/۴) (f یک به یک است) $\rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt{۲^x} - ۲$

۲/۵) (f یک به یک نیست)   ۲/۶) (f یک به یک نیست)

۳/۱) $(-\infty,۰)\cup(۱,+\infty)$ ۳/۲) $(-\infty,-۲)\cup(۲,+\infty)$

۳/۳) $[۱,+\infty)$ ۳/۴) $(۱,۲]$

۴/۱) f فرد است   ۴/۲) f فرد است

فصل دوم: حد و پیوستگی

تمرین‌های صفحه ۷۸ :

۱/۱) $\underset{x\to ۳^+}{Lim} f(x) = ۱ \quad , \quad \underset{x\to ۳^-}{Lim} f(x) = ۱$

۱/۲) $\underset{x\to ۱^+}{Lim} f(x) = ۱ \quad , \quad \underset{x\to ۱^-}{Lim} f(x) = -۱$

۱/۳) $\underset{x\to ۱^+}{Lim} f(x) = ۱ \quad , \quad \underset{x\to ۱^-}{Lim} f(x) = -۱$

۱/۴) $\underset{x\to ۰^+}{Lim} f(x) = ۰ \quad , \quad \underset{x\to ۰^-}{Lim} f(x) = ۰$

۱/۵) $\underset{x\to -۱^+}{Lim} f(x) = -۱ \quad , \quad \underset{x\to -۱^-}{Lim} f(x) = -۱$

۱/۶) $\underset{x\to ۲^+}{Lim} f(x)$ موجود نیست , $\underset{x\to ۲^-}{Lim} f(x) = ۰$

۲/۱) $\underset{x\to ۰^+}{Lim} f(x) = ۱ \quad , \quad \underset{x\to ۰^-}{Lim} f(x) = ۱$

۲/۲) $\underset{x\to -۱^+}{Lim} f(x) = -۱ \quad , \quad \underset{x\to -۱^-}{Lim} f(x) = ۲$

۲/۳) $\underset{x\to ۰^+}{Lim} f(x) = ۰ \quad , \quad \underset{x\to ۰^-}{Lim} f(x) = ۱$

۲/۴) $\underset{x\to ۰^+}{Lim} f(x) = ۰ \quad , \quad \underset{x\to ۰^-}{Lim} f(x) = ۰$

۲/۵) $\underset{x\to -۱^+}{Lim} f(x) = ۱ \quad , \quad \underset{x\to -۱^-}{Lim} f(x) = -۱$

۲/۶) $\underset{x\to ۲^+}{Lim} f(x) = -۱ \quad , \quad \underset{x\to ۲^-}{Lim} f(x) = -۱$

۳/۱) -۱ ۳/۲) ۱   ۳/۳) $\sqrt{۱۰}$ ۳/۴) موجود نیست

۳/۵) موجود نیست   ۳/۶) -۱ ۳/۷) -۲ ۳/۸) $\frac{۱}{۲}$

۳/۹) ۶   ۳/۱۰) ۰

۴/۱) $\frac{۱}{۳}$ ۴/۲) ۴   ۴/۳) -۴ ۴/۴) -۱۵

۴/۵) ۲   ۴/۶) $-\frac{۱}{۴}$ ۴/۷) $\frac{۱}{۴}$ ۴/۸) $\frac{۲}{۳}$

۴/۹) $\frac{۱۷}{۱۲}$ ۴/۱۰) $\sqrt{\frac{۶}{۵}}$ ۴/۱۱) ۱۲   ۴/۱۲) $\frac{۱}{۳a^۲}$

۵/۱) $\frac{۳}{۵}$ ۵/۲) ۴   ۵/۳) $\frac{۱}{۲}$ ۵/۴) $\frac{۷}{۳}$

۵/۵) $\frac{۱}{۵}$ ۵/۶) ۶   ۵/۷) $-\pi$ ۵/۸) -۱

۵/۹) ۰ (به کمک قضیه فشردگی)   ۵/۱۰) ۰ (به کمک قضیه فشردگی)

۶) $\underset{x\to ۰}{Lim} f(x) = ۲$ (به کمک قضیه فشردگی)

۷) $\xrightarrow{\text{به کمک قضیه فشردگی}} \underset{x\to ۱^+}{Lim} f(x) = -۱ \to \underset{x\to ۱^+}{Lim} (۲f(x) + ۵) = ۳$

۸) $\xrightarrow{\text{به کمک قضیه فشردگی}} \underset{x\to ۳}{Lim} f(x) = ۴ \to \underset{x\to ۳}{Lim} \sqrt{f(x)} = ۲$ (عملیات مشابه مثال ۲۰ صفحه ۷۵)

۹) $a = \frac{۲۷}{۲۸}$ و $b = \frac{۲}{۷}$ ۱۰) $۱۰a - ۶b = ۱$ (یعنی تعداد نامتناهی زوج مرتب (a, b) می‌توان معرفی کرد)

۱۱) $a = b = \frac{۱}{۳}$ ۱۲/۱) ۵   ۱۲/۲) ۱۱

۱۳/۱) حد موجود نیست زیرا: $L \neq L'$ ۱۳/۲) $\frac{۱}{۶}$ ۱۳/۳) حد موجود نیست زیرا: $L \neq L'$

۱۳/۴) ۰   ۱۳/۵) ۰   ۱۳/۶) با توجه به دامنه، حد موجود نیست   ۱۳/۷) -۲

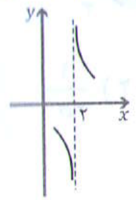
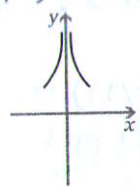
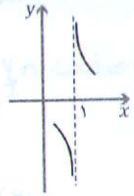
۱۳/۸) ۰   ۱۳/۹) -۱ ۱۳/۱۰) -۱ ۱۳/۱۱) ۰   ۱۳/۱۲) ۳

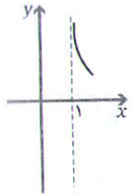
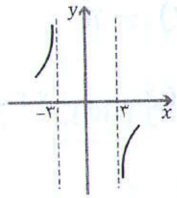
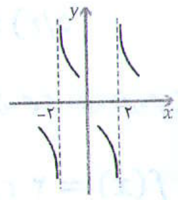
۱۳/۱۳) $\frac{۱}{۲}$ ۱۳/۱۴) ۰   ۱۳/۱۵) حد موجود نیست زیرا: $L \neq L'$ ۱۳/۱۶) ۱

تمرین‌های صفحه ۸۸ :

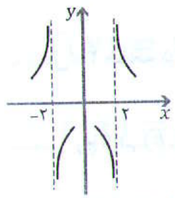
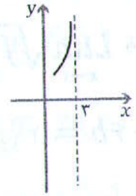
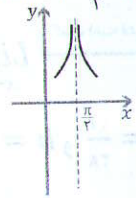
۱/۱) $-\infty$ ۱/۲) $+\infty$ ۱/۳) $-\infty$ ۱/۴) $-\infty$ ۱/۵) $-\infty$

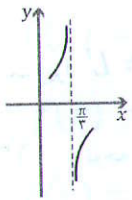
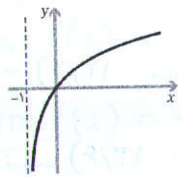
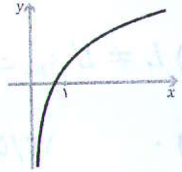
۱/۶) $-\infty$ ۱/۷) $+\infty$ ۱/۸) $+\infty$ ۱/۹) $-\infty$ ۱/۱۰) $-\infty$

۲/۱) $x = ۲$

۲/۲) $x = ۰$

۲/۳) $x = ۱$


۲/۴) $x = ۱$

۲/۵) $x = ۳$ و $x = -۳$

۲/۶) $x = ۲$ و $x = -۲$


۲/۷) مجانب قائم ندارد ۲/۸) مجانب قائم ندارد ۲/۹) مجانب قائم ندارد ۲/۱۰) مجانب قائم ندارد

۲/۱۱) $x = ۲$ و $x = -۲$

۲/۱۲) $x = ۳$

۲/۱۳) $x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}\ , k \in \mathbb{Z}$


۲/۱۴) $x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}\ , k \in \mathbb{Z}$

۲/۱۵) $x = -۱$

۲/۱۶) $x = ۰$


تمرین‌های صفحه ۹۶ :

۱/۱) ۰	۱/۲) ۰	۱/۳) $+\infty$	۱/۴) ۰
۱/۵) ۰	۱/۶) $+\infty$	۱/۷) $+\infty$	۱/۸) موجود نیست
۲/۱) $-\infty$	۲/۲) $-\infty$	۲/۳) $-\frac{۱}{۲}$	۲/۴) $-\frac{۵}{۴}$
۲/۵) ۰	۲/۶) ۰	۲/۷) $+\infty$	۲/۸) $+\infty$

۲/۹) $-\infty$	۲/۱۰) $+\infty$	۲/۱۱) -۱	۲/۱۲) $\frac{۱}{۴}$
۲/۱۳) $+\infty$	۲/۱۴) $-\infty$	۲/۱۵) $-\frac{۳}{۲}$	۲/۱۶) $+\infty$
۲/۱۷) ۰	۲/۱۸) $-\infty$	۲/۱۹) $\frac{۱}{۲}$	۲/۲۰) ۰
۲/۲۱) $+\infty$	۲/۲۲) $-\infty$		
۳) ۰	۴) $\frac{۱}{۲}$	۵/۱) ۰	۵/۲) ۰

۶/۱) $n = ۲$ ۶/۲) $n \geq ۴$ ۶/۳) $n = ۱$ یا $x = ۲$

۶/۴) $a = -۷$ ۶/۵) $n \geq ۴$ و n زوج ۶/۶) $n = ۱$ یا $n = ۲$

۶/۷) $n = ۳$ و $a = ۲$ ۶/۸) $n = ۱$ یا $n = ۲$ یا $n = ۳$

۷/۱) $y = ۱$ ۷/۲) $y = ۱$ ۷/۳) $y = ۰$

۷/۴) $y = ۰$ ۷/۵) $y = ۱$ و $y = -۱$ ۷/۶) $y = ۰$

۷/۷) با توجه به دامنه، مجانب ندارد ۷/۸) $y = ۱$ ۷/۹) $y = ۱$

۷/۱۰) $y = -۳$ ۷/۱۱) مجانب ندارد ۷/۱۲) $y = ۰$

تمرین‌های صفحه ۱۰۵ :

۱/۱) در $x = -۱$ پیوسته است. ۱/۲) در $x = -۱$ پیوسته است.

۱/۳) در $x = ۲$ فقط پیوستگی راست دارد. ۱/۴) در $x = ۱$ فقط پیوستگی چپ دارد.

۱/۵) در $x = ۰$ فقط پیوستگی راست دارد. ۱/۶) در $x = ۱$ هیچ نوع پیوستگی ندارد.

۱/۷) در $x = ۰$ هیچ نوع پیوستگی ندارد. ۱/۸) در $x = ۳$ پیوسته است.

۲/۱) $f(۰) = ۱$ ۲/۲) $f(۰) = ۲$ ۲/۳) $f(۲) = -۴$ ۲/۴) $f(۴) = \frac{۱}{۴}$

۳/۱) $a = \frac{-۱۱}{۱۶}$ و $b = \frac{۹}{۴}$ ۳/۲) $a - ۴b = -۱$

۴/۱) $\mathbb{R}$ ۴/۲) $(-\infty, -۱)$ و $(-۱, ۱)$ و $(۱, +\infty)$

۴/۳) $(-\infty,-۲)$ و $[۱,+\infty)$ ۴/۴) $(-\infty,۱]$ و $[۲,+\infty)$

۵/۱) $-۲\sqrt{۲}<a<۲\sqrt{۲}$ ۵/۲) $b\geq ۰$

۵/۳) $a=\frac{۱}{۳}$ و $b=\frac{۲}{۳}$ ۵/۴) $a=\frac{۱}{۴}$ و $b=\frac{-۱}{۲}$

۶) $f(x)=\begin{cases}۲ & x>۱\\ ۳ & x\leq ۱\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}۳ & x>۱\\ ۲ & x\leq ۱\end{cases}$

الف) $(f+g)(x)=۵$ ب) $(f\cdot g)(x)=۶$

۷/۱) تابع $f(x)=x^۳-x-۱$ در فاصله $(۱,۲)$ پیوسته است و داریم $f(۱)<۰$ و $f(۲)>۰$، پس به کمک قضیه مقدار میانی می‌توان نتیجه گرفت که معادله حداقل یک ریشه در این فاصله دارد.

۷/۲) تابع $f(x)=\frac{\pi}{۲}+\sin x-x$ در فاصله $(\frac{\pi}{۲},\pi)$ پیوسته است و داریم $f(\frac{\pi}{۲})>۰$ و $f(\pi)<۰$، پس به کمک قضیه مقدار میانی می‌توان نتیجه گرفت که معادله حداقل یک ریشه در این فاصله دارد.

فصل سوم: مشتق

تمرین‌های صفحه ۱۱۱ :

۱/۱) $f'(۲)=۰$ ۱/۲) $f'(۱)=۳$ ۱/۳) $f'(۳)=۴$

۱/۴) $f'(-۲)=۱۲$ ۱/۵) $f'(۴)=\frac{۱}{۳}$ ۱/۶) $f'(۰)=۲$

۱/۷) $f'(۰)=۱$ ۱/۸) $f'(\frac{\pi}{۲})=-۱$

۲/۱) $\left(f'_+(۲)=۴ \text{ و } f'_-(۲)=۲\right)\to f'(۲)$ موجود نیست

۲/۲) $\left(f'_+(۰)=۰ \text{ و } f'_-(۰)=۰\right)\to f'(۰)=۰$

۲/۳) $\left(f'_+(۱)=-۱ \text{ و } f'_-(۱)=-۱\right)\to f'(۱)=-۱$

۲/۴) $\left(f'_+(۱)=-۲ \text{ و } f'_-(۱)=-۱\right)\to f'(۱)$ موجود نیست

۲/۵) $\left(f'_+(۰)=\sqrt{۲} \text{ و } f'_-(۰)=-\sqrt{۲}\right)\to f'(۰)$ موجود نیست

۲/۶) $\left(f'_+(۱)=۱ \text{ و } f'_-(۱)=۰\right)\to f'(۱)$ موجود نیست

۲/۷) $\left(f'_+(۰)=+\infty \text{ و } f'_-(۰)=-\infty\right)\to f'(۰)$ موجود نیست

۲/۸) $\left(f'_+(۰)=+\infty \text{ و } f'_-(۰)=-\infty\right)\to f'(۰)$ موجود نیست

۳/۱) $a=۲$ و $b=۰$ ۳/۲) $a=۴$ و $b=-۲$

۳/۳) $a=۳$ و $b=۵$ ۳/۴) $a=۹$ و $b=۱۸$

تمرین‌های صفحه ۱۲۲ :

۱/۱) $f'(x)=۳x^۲$ ۱/۲) $f'(x)=۲x+۲$

۱/۳) $f'(x)=\frac{۱}{(x+۱)^۲}$ ۱/۴) $f'(x)=\frac{۱}{\sqrt{۲x-۱}}$

۲/۱) $f'(x)=۲x^۷-۴x^۳$ ۲/۲) $v'(r)=۴\pi r^۲$

۲/۳) $s'(r)=\pi r+۵\pi$ ۲/۴) $f'(x)=x^۳-\frac{۶}{x^۴}$

۲/۵) $g'(h)=\frac{۷}{(h+۲)^۲}$ ۲/۶) $g'(x)=\frac{۳x^۲+۴x+۷}{(۳x+۲)^۲}$

۲/۷) $f'(x)=(۲x-۵)(x^۷-۸x+۱)+(x^۲-۵x)(۷x^۶-۸)$

۲/۸) $f'(x)=۲x\cot x-x^۲(۱+\cot^۲ x)$

۲/۹) $g'(x)=-۴\sin x-x\cos x$

۲/۱۰) $g'(t)=t^۲\sec t\,(۳+t\tan t)$ ۲/۱۱) $h'(z)=\frac{۱+\cos z-\sin z}{(\cos z+۱)^۲}$

۲/۱۲) $g'(z)=\frac{۴\cos z+۲z\cos z-۲\sin z}{(۲+z)^۲}$ ۲/۱۳) $h'(t)=t^۲(۳\ln t+۱)$

۲/۱۴) $h'(x)=e^x(\cos x-\sin x)$

۲/۱۵) $f'(x)=(۲x+۱)(e^x+۱)+e^x(x^۲+x)$

۲/۱۶) $f'(x) = \frac{۱}{x\ln ۳} - e^x - xe^x$

۲/۱۷) $g'(x) = ۵^x((\ln ۵)\sin x + \cos x)$

۲/۱۸) $g'(x) = \frac{e^x + ۳}{x} + e^x(۲ + \ln x)$

۲/۱۹) $f'(x) = ۲x\tanh x + x^۲(۱ - \tanh^۲ x)$

۲/۲۰) $f'(x) = ۲(\cosh^۲ x + \sinh^۲ x)$

۲/۲۱) $f'(x) = ۰$ ۲/۲۲) $f'(x) = \frac{-۱}{۱+x^۲}$

۲/۲۳) $f'(x) = ۲x\cos^{-۱} x - \frac{x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}}$ ۲/۲۴) $f'(x) = \frac{\tan^{-۱} x}{۲\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x^۲+۱}$

۳/۱) $(fog)'(x) = \cos x\,(\ln ۲)۲^{\sin x}$ ۳/۲) $(fog)'(x) = \frac{۳x^۲+۳}{۲\sqrt{x^۳+۳x-۱}}$

۴/۱) $y' = \frac{-۲}{x^۴} + \frac{۳}{x^۳}$ ۴/۲) $y' = (e^x + xe^x)(۸xe^x - ۵)$

۵/۱) $f'(x) = ۵(۳ - ۳x^۲)(۳x - x^۳)^۴$ ۵/۲) $f'(x) = \frac{۲(۲x-۵)}{۳\sqrt[۳]{x^۲-۵x}}$

۵/۳) $g'(x) = \frac{-۱۵}{۲\sqrt{(۵x+۱)^۳}}$ ۵/۴) $g'(x) = \frac{۴x-۱۰}{۳\sqrt[۳]{(۵x-x^۲)^۴}}$

۵/۵) $f'(x) = -۶x\sin(۳x^۲ + ۳)$

۵/۶) $f'(x) = ۲(۱ + \tan^۲(۲x + ۱))$

۵/۷) $f'(x) = -۳\sin ۳x - ۱۰\cos ۵x$

۵/۸) $f'(x) = ۲(۱ + \tan^۲(۲x)) - ۷\sin ۷x$

۵/۹) $f'(x) = ۵\cos ۵x\cot ۲x - ۲\sin ۵x\,(۱ + \cot^۲ ۲x)$

۵/۱۰) $h'(x) = ۲x\sin(۲x + ۱) + ۲x^۲\cos(۲x + ۱)$

۵/۱۱) $f'(x) = \frac{(۱-x)\cos(۲x-x^۲)}{\sqrt{\sin(۲x-x^۲)}}$ ۵/۱۲) $f'(x) = ۱۵\cos ۵x\sin^۲ ۵x$

۵/۱۳) $h'(x) = ۱۰e^{۵x}$ ۵/۱۴) $f'(x) = \cos x\,(\ln ۴)۴^{\sin x}$

۵/۱۵) $f'(x) = e^x\cos(e^x) - e^{۲x}\sin(e^x)$

۵/۱۶) $\left(g(x) = x^۵ e^{\ln x^{-۳}} = x^۵x^{-۳} = x^۲,\ x > ۰\right) \to g'(x) = ۲x$

۵/۱۷) $f'(x) = \frac{۳}{۳x+۲}$ ۵/۱۸) $g'(x) = \frac{۱}{۲(۲+x)}$

۵/۱۹) $f'(x) = \frac{۹\ln^۲(۳x-۱)}{۳x-۱}$ ۵/۲۰) $h'(x) = \frac{-۱}{x}\sin(\ln x)$

۵/۲۱) $g'(x) = \log_۲(x^۲ + ۱) + \frac{۲x^۲}{(\ln ۲)(x^۲+۱)}$

۵/۲۲) $h'(x) = ۲\cot ۲x$ ۵/۲۳) $f'(x) = \frac{۱}{(x+۱)\ln(x+۱)}$

۵/۲۴) $g'(x) = -۲x(\ln ۳)۳^{x^۲}\sin(۳^{x^۲})$

۵/۲۵) $f'(x) = \frac{-۲e^{۲x}}{\sqrt{۱-e^{۴x}}}$ ۵/۲۶) $f'(x) = \frac{۴x}{۱+(۲x^۲+۲)^۲}$

۵/۲۷) $f'(x) = \frac{-x}{|x|\sqrt{۱-x^۲}}$ ۵/۲۸) $f'(x) = \frac{۲}{(۱+۴x^۲)\tan^{-۱} ۲x}$

۵/۲۹) $f'(x) = ۵\cosh(۵x - ۳)$

۵/۳۰) $g'(x) = e^x(۱ - \tanh^۲(e^x - ۲))$

۵/۳۱) $h'(x) = \frac{(۲x+۱)^۲(-۲x-۱۰)}{(x-۱)^۵}$

۵/۳۲) $f'(x) = (x^۳ - x)^۲(x^۲ + ۱)^۴(۲۲x^۴ - ۲x^۲ - ۴)$

۵/۳۳) $g'(x) = ۲^{۵x}۳^{x^۲}(۵\ln ۲ + ۲x\ln ۳)$

۵/۳۴) $h'(x) = (x + ۱)^۲e^{۵x+۱}(۵x + ۸)$

تمرین‌های صفحه ۱۳۳:

۱/۱) $f'(x) = \frac{-x-۲}{x^۳}$, $f''(x) = \frac{۲x+۶}{x^۴}$

۱/۲) $g'(x) = ۲x\cos(x^۲)$, $g''(x) = ۲\cos(x^۲) - ۴x^۲\sin(x^۲)$

۱/۳) $h'(x) = ۲xe^{x^۲+۱}$, $h''(x) = ۲e^{x^۲+۱}(۱ + ۲x^۲)$

۱/۴) $f'(x) = \frac{۲\ln x}{x}$, $f''(x) = \frac{۲(۱-\ln x)}{x^۲}$

۲/۱) $f'(t) = ۶\cos ۲t$, $f''(t) = -۱۲\sin ۲t$

$f'''(t) = -۲۴\cos ۲t$, $f^{(۴)}(t) = ۴۸\sin ۲t$

۲/۲) $f'(x) = ۳e^{۳x+۱}$, $f''(x) = ۳^۲e^{۳x+۱}$

$f'''(x) = ۳^۳e^{۳x+۱}$, $f^{(۴)}(x) = ۳^۴e^{۳x+۱}$

۲/۳) $f'(x) = \frac{-۶}{(۲x-۱)^۲}$, $f''(x) = \frac{۲۴}{(۲x-۱)^۳}$

$f'''(x) = \frac{-۱۴۴}{(۲x-۱)^۴}$, $f^{(۴)}(x) = \frac{۱۱۵۲}{(۲x-۱)^۵}$

۲/۴) $f'(t) = \frac{۲}{\sqrt{۴t+۱}}$, $f''(t) = \frac{-۴}{\sqrt{(۴t+۱)^۳}}$

$f'''(t) = \frac{۲۴}{\sqrt{(۴t+۱)^۵}}$, $f^{(۴)}(t) = \frac{-۲۴۰}{\sqrt{(۴t+۱)^۷}}$

۳/۱) $f^{(n)}(x) = (\ln a)^n a^x$ ۳/۲) $f^{(n)}(x) = ۲^n e^{۲x}$

۳/۳) $f^{(n)}(x) = \frac{(-۱)^{n+۱}(n-۱)!}{x^n}$

۳/۴) $f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x & n = ۴k-۳ \\ -\sin x & n = ۴k-۲ \\ -\cos x & n = ۴k-۱ \\ \sin x & n = ۴k \end{cases} \quad , \; k \in \mathbb{N}$

۴/۱) $\frac{dy}{dx} = \frac{۳y-۲x}{۳y^۲-۳x}$ ۴/۲) $\frac{dy}{dx} = \frac{۷y^۲-۱۲x^۳y^۲}{۶x^۴y-۱۴xy+۳}$

۴/۳) $\frac{dy}{dx} = \frac{-y^۲}{x^۲}$ ۴/۴) $\frac{dy}{dx} = \frac{۱-۲xy}{x^۲-۲}$

۴/۵) $\frac{dy}{dx} = \frac{y\sin x-\cos y}{\cos x-x\sin y}$ ۴/۶) $\frac{dy}{dx} = -\frac{۲\sin(۲x+۳y)+y\cos x}{۳\sin(۲x+۳y)+\sin x}$

۴/۷) $\frac{dy}{dx} = \frac{۳x^۲}{e^y(x^۲+۳y)-۳}$ ۴/۸) $\frac{dy}{dx} = \frac{-(۲ye^{۲x}+e^{۲y})}{e^{۲x}+۲xe^{۲y}}$

۴/۹) $\frac{dy}{dx} = \frac{(۱+y^۲)\sin y}{۱-x(۱+y^۲)\cos y}$ ۴/۱۰) $\frac{dy}{dx} = \frac{(y-۲x)\sqrt{۱-۴y^۲}}{۲-x\sqrt{۱-۴y^۲}}$

۵/۱) $\frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{۲x\sqrt{x}}$ ۵/۲) $\frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{-۲x^۴-۲xy^۳}{y^۵}$

۵/۳) $\frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{۱۰y}{۹x^۲}$ ۵/۴) $\frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{۸(x^۲+y^۲+۶xy)}{(۳x+y)^۳}$

۶/۱) با مشتق‌گیری ضمنی از رابطه $x = \cos y$ و محدودیت $۰ \le y \le \pi$ ثابت می‌شود.

۶/۲) با مشتق‌گیری ضمنی از رابطه $x = \cot y$ ثابت می‌شود.

۷/۱) $f'(x) = x^{\sqrt{x}}(\frac{۲+\ln x}{۲\sqrt{x}})$ ۷/۲) $f'(x) = x^{\ln x}(\frac{۲\ln x}{x})$

۷/۳) $f'(x) = (\ln x)^x[\ln(\ln x) + \frac{۱}{\ln x}]$

۷/۴) $f'(x) = (\sin x)^x[\ln(\sin x) + x\cot x]$

۸/۱) $f'(x) = f(x)(\frac{۳}{x} + \frac{۱۰x}{x^۲-۱} + \frac{۴}{x+۱})$

۸/۲) $f'(x) = f(x)(\frac{۱}{۲}\tan x + ۳\cot ۳x + \cot x)$

۸/۳) $f'(x) = f(x)(\frac{۱}{x} + \frac{x}{x^۲+۱} - \frac{۲}{۳(x+۱)})$

۸/۴) $f'(x) = f(x)(\frac{۱۴}{۳x} + \frac{۱}{(۱+x^۲)\tan^{-۱}x} + \frac{۲}{۳-۲x})$

۹/۱) $y = \frac{۱}{۲۷}(x-۲)^۳ \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{۱}{۹}(x-۲)^۲$

۹/۲) $y = -\ln(۱-x) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{۱}{۱-x}$

۹/۳) $x^۲ + y^۲ = ۱ \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$

۹/۴) $x = (y+۲)^۲ \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{۱}{۲(y+۲)}$

$۱۰/۱)\ \frac{dy}{dx} = \frac{۱+\ln t}{۵e^{۵t}}$ $\qquad$ $۱۰/۲)\ \frac{dy}{dx} = \frac{۳t^۲+۲t}{۲t+۵}$

$۱۰/۳)\ \frac{dy}{dx} = \frac{۳\cos(۲t+۱)}{-۲\sin ۲t}$ $\qquad$ $۱۰/۴)\ \frac{dy}{dx} = \frac{\cos t - t\sin t}{\sec t \tan t}$

$۱۱/۱)\ \frac{dy}{dx}(t=۲) = ۱۵$ $\qquad$ $۱۱/۲)\ \frac{dy}{dx}(t=۲) = \frac{۱}{۱۱}$

$۱۲/۱)\ \frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{-۴t^۳}{(t^۲-۱)^۳}$ $\qquad$ $۱۲/۲)\ \frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{۳}{۴t}$

فصل چهارم: کاربرد مشتق

تمرین‌های صفحه ۱۴۳ :

$۱/۱)\ y = \frac{۵}{۴}x + \frac{۳}{۴}$ خط مماس ، $y = \frac{-۴}{۵}x + \frac{۱۴}{۵}$ خط قائم

$۱/۲)\ x = ۱$ خط مماس ، $y = ۲$ خط قائم

$۱/۳)\ y = ۲x - \frac{\pi}{۲} + ۱$ خط مماس ، $y = -\frac{۱}{۲}x + \frac{\pi}{۸} + ۱$ خط قائم

$۱/۴)\ y = -x + \frac{\pi}{۲}$ خط مماس ، $y = x + \frac{\pi}{۲}$ خط قائم

$۱/۵)\ y = \frac{-۱}{۲}x + \frac{۱}{۲}\ln ۲ + \frac{۱}{۲}$ خط مماس ، $y = ۲x - ۲\ln ۲ + \frac{۱}{۲}$ خط قائم

$۱/۶)\ y = ۸x - ۸$ خط مماس ، $y = -\frac{۱}{۸}x + \frac{۱}{۸}$ خط قائم

$۲/۱)\ y = e$ $\qquad$ $۲/۲)\ y = x - ۳$ و $y = x + ۵$

$۳/۱)\ y = \frac{۱}{۴}x + \frac{۱}{۴}$ $\qquad$ $۳/۲)\ y = -x - e^{-۲}$

$۴/۱)\ y = x + \pi$ خط مماس ، $y = -x + \pi$ خط قائم

$۴/۲)\ y = \frac{-۱}{۴}x + \frac{۵}{۴}$ خط مماس ، $y = ۴x - ۳$ خط قائم

$۵/۱)\ y = ۹x - ۲۳$ $\qquad$ $۵/۲)\ y = \frac{۱}{۲e}x - \frac{۱}{۲}$

$۶)\ T(۲-\sqrt{۲}, ۲\sqrt{۲}-۲)$ $\qquad$ $۷)\ T(۳,۹)$ $\qquad$ $۸)\ A(-۳,۲)\ ،\ B(-\frac{۱}{۳},-۲)$

$۹/۱)\ A(-۱,۱)\ ،\ B(۰,۰)\ ،\ C(۲,۴)$

زاویه بین دو منحنی در نقطه $x = -۱$: $\alpha = \tan^{-۱}(\frac{۳}{۴}) = ۳۶/۸۶^\circ$

$۹/۲)\ A(۰,۰)\ ،\ B(۱,۶)\ ،\ C(۲,۲۴)$

زاویه بین دو منحنی در نقطه $x = ۰$: $\alpha = \tan^{-۱}(\frac{۲}{۹}) = ۱۲/۵۲^\circ$

تمرین‌های صفحه ۱۵۰ :

$۱/۱)\ s = \pi r^۲ \rightarrow \frac{ds}{dr} = ۲\pi r$ $\qquad$ $۱/۲)\ s = ۶x^۲ \rightarrow \frac{ds}{dx} = ۱۲x$

$۱/۳)\ s = ۳x^۲ \rightarrow \frac{ds}{dx} = ۶x$ $\qquad$ $۱/۴)\ v = \frac{\pi}{۱۲}h^۳ \rightarrow \frac{dv}{dh} = \frac{\pi}{۴}h^۲$

$۱/۵)\ (v = a^۳,\ s = ۶a^۲) \rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{a}{۴}$ (به کمک مشتق‌گیری پارامتری)

$۱/۶)\ (v = \frac{۴}{۳}\pi r^۳,\ s = ۴\pi r^۲) \rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{۱}{۲}r$ (به کمک مشتق‌گیری پارامتری)

$۲)\ s(r) = ۴\pi r^۲\ ,\ \frac{\Delta s}{\Delta r} = \frac{s(۵)-s(۳)}{۵-۳} = ۳۲\pi\ cm^۲/cm$ میزان متوسط

$s'(۵) = ۴۰\pi\ cm^۲/cm$ میزان لحظه‌ای

$۳)\ v(r) = \frac{۴\pi}{۳}(۴ - ۰/۰۴t)^۳\ m^۳/min\ ,\ v'(۶۰) = -\frac{(۱/۶)^۲\pi}{۱۰}\ m^۳/min$

$۴)\ s(۱) = ۲/۵\ m\ ,\ v(۱) = ۲\ m/s\ ,\ a(۱) = ۰\ m/s^۲$

$۵)\ I(۲) = Q'(۲) = ۵\ A$

$۶)\ v'(t) = \frac{-۷۵}{۴}\ Lit/min$

۷) $\frac{f(۲۰)-f(۰)}{۲۰-۰} = ۵(e^{۰/۸} - ۱)$ رشد متوسط ، $f'(۲۰) = ۴e^{۰/۸}$ رشد لحظه‌ای

۸) $\frac{c(۱۰۰)}{۱۰۰} = ۲۵۵$ هزینه متوسط ، $c'(۱۰۰) = ۲۱۰$ هزینه نهایی

تحلیل اقتصادی: در تولید ۱۰۰ عروسک، هزینه متوسط هرکدام ۲۵۵ تومان است و اگر کارخانه تصمیم بگیرد یک عروسک بیشتر تولید کند، هزینه یکصدویکمین عروسک، ۲۱۰ تومان می‌شود.

تمرین‌های صفحه ۱۵۶ :

۱) $x_۰ = ۳ \ , \ \frac{dx}{dt} = \frac{۲۸}{۳}$ ۲) $y_۰ = ۴ \ , \ \frac{dx}{dt} = -۱$

۳) $s = \pi r^۲ \ , \ \frac{ds}{dt} = ۴۰۰\pi \ m^۲/s$ (عملیات مشابه مثال ۲ صفحه ۱۵۲)

۴) $v = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ \ , \ s = ۴\pi r^۲ \ , \ r_۰ = ۳ \ , \ \frac{dv}{dt} = ۱۸\pi \ m^۳/s \ , \ \frac{ds}{dt} = ۱۲\pi \ m^۲/s$

۵) $v = x^۳ \ , \ s = ۶x^۲ \ , \ \frac{dv}{dt} = ۶۰ \ cm^۳/s \ , \ \frac{ds}{dt} = ۲۴ \ cm^۲/s$

۶) $\xrightarrow{\text{رابطه تالس}} h = ۴r \ , \ v = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۴}{۳}\pi r^۳$

$\frac{dr}{dt} = \frac{۳}{۱۶\pi} \ m/min$ (عملیات مشابه مثال ۴ صفحه ۱۵۳)

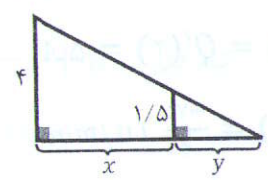
۷) $x^۲ + y^۲ = ۲۵^۲ \ , \ x_۰ = \sqrt{۲۵^۲ - ۲۰^۲} = ۱۵ \ , \ \frac{dy}{dt} = -۴ \ m/s$

$\frac{dx}{dt} = \frac{۱۶}{۳} \ m/s$ (عملیات مشابه مثال ۵ صفحه ۱۵۴)

۸) $x^۲ + y^۲ = z^۲ \ , \ z_۰ = \sqrt{۲۰۰^۲ + ۱۵۰^۲} = ۲۵۰ \ m = ۰/۲۵ \ km \ , \ \frac{dz}{dt} = ۱۰۸ \ km/h$

۹) $h = ۲r \ , \ v = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{\pi}{۱۲}h^۳ \ , \ \frac{dh}{dt} = \frac{۴}{۵\pi} m/min$

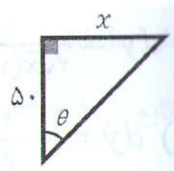
۱۰/۱) $\xrightarrow{\text{رابطه تالس}} \frac{۱/۵}{۴} = \frac{y}{x+y} \rightarrow ۱/۵x = ۲/۵y$



$\frac{dy}{dt} = ۰/۷۵ \ m/s$

۱۰/۲) $z = x + y \rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = ۱/۲۵ + ۰/۷۵ = ۲ \ m/s$

۱۱) $\theta = tan^{-۱}(\frac{x}{۵۰}) \ , \ \frac{dx}{dt} = ۱۰ \ m/s \ , \ x_۰ = ۵۰ \ m$



$\frac{d\theta}{dt} = \frac{۱}{۱۰} \ rad/min$ (عملیات مشابه مثال ۶ صفحه ۱۵۵)

تمرین‌های صفحه ۱۶۳ :

۱) $v = x^۳ \ , \ s = ۶x^۲ \ , \ x_۰ = ۱۵ \ cm \ , \ \Delta x = \pm ۰/۰۱ \ cm$

$\Delta v = \pm ۶/۷۵ \ cm^۳ \ , \ \Delta s \cong \pm ۱/۸ \ cm^۲$

۲) $s = (۲x)x = ۲x^۲ \ , \ x_۰ = ۴۵ \ m \ , \ \Delta x = \pm ۰/۰۲ \ m \ , \ \Delta s \cong \pm ۳/۶ \ m^۲$

۳) $v = \frac{۱}{۲}(\frac{۴}{۳}\pi r^۳) \ , \ r_۰ = ۴ \ m \ , \ \Delta r = ۰/۵ \ m$

$\Delta v \cong ۰/۱۶\pi \ m^۳ \cong ۰/۵ \ m^۳$

۴) $v = ۱۰\pi r^۲ \ , \ r_۰ = ۲/۵ \ cm \ , \ \Delta r = -۰/۲ \ cm \ , \ \Delta v \cong -۱۰\pi \ cm^۳$

۵/۱) $۰/۲ + \frac{۱}{۲۰۰}$ ۵/۲) $\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۱۲۸}$ ۵/۳) $۱ - \frac{۱}{۳۰۰۰}$

۵/۴) $۳ + \frac{۱}{۱۰۸}$ ۵/۵) $۱ + \frac{\pi}{۹۰}$ ۵/۶) $\frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}\pi}{۱۸۰}$

۵/۷) $۴ + \frac{۱}{۱۰}$ ۵/۸) $\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳۲۰}$ ۵/۹) $۰/۹۷e$

۵/۱۰) $۰/۰۵$ ۵/۱۱) $\frac{\pi}{۴} + \frac{۱}{۱۰۰}$ ۵/۱۲) $۲ + \frac{\sqrt{۳}\pi}{۴۵}$

۶/۱) $dy = \frac{۱}{۴\sqrt[۴]{x^۳}}dx$ ۶/۲) $dy = ۱۴(x-۱)(x^۲-۲x)^۶ dx$

۶/۳) $dy = ۵\cos ۵t \, dt$ ۶/۴) $dy = -۲\sin t \cos t \, dt$

۶/۵) $dy = \frac{۴-x}{x^۳}dx$ ۶/۶) $dy = (۲x\sin x + x^۲\cos x) dx$

۶/۷) $du = (3\ln 2)2^{3x-2}\,dx$ ۶/۸) $du = \frac{1-\ln x}{x^2}dx$

۶/۹) $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}dx$ ۶/۱۰) $dy = (\sin^{-1}x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}})\,dx$

۶/۱۱) $dy = -\frac{2xy+y^3}{x^2+3xy^2}dx$ ۶/۱۲) $dy = \frac{2xy-2\cos(2x+3y)}{3\cos(2x+3y)-x^2}dx$

تمرین‌های صفحه ۱۷۰:

۱/۱) $\frac{-2}{3}$	۱/۲) $\frac{1}{3}$	۱/۳) $\frac{3}{4}$	۱/۴) 1
۱/۵) $-\pi$	۱/۶) $\frac{2}{3}$	۱/۷) $\frac{1}{n}$	۱/۸) 0
۱/۹) 0	۱/۱۰) 0	۱/۱۱) 0	۱/۱۲) $\frac{1}{3}$
۱/۱۳) 1	۱/۱۴) $\frac{-2}{\pi}$	۱/۱۵) 0	۱/۱۶) 0
۲/۱) 1	۲/۲) e	۲/۳) 1	۲/۴) 1
۲/۵) e^2	۲/۶) e^{-2}	۲/۷) e^{-1}	۲/۸) $e^{-\frac{1}{2}}$

تمرین‌های صفحه ۱۸۰:

۱/۱) شرایط قضیه رل برقرار و نقطه مورد نظر $x = \frac{5}{2}$ است.

۱/۲) شرایط قضیه رل برقرار و نقاط مورد نظر $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ است.

۱/۳) تابع در $x = 1$ پیوسته نیست، پس شرایط قضیه رل برقرار نمی‌باشد.

۱/۴) تابع در $x = 2$ مشتق ندارد، پس شرایط قضیه رل برقرار نیست.

۱/۵) شرایط قضیه رل برقرار و نقطه مورد نظر $x = \frac{\pi}{4}$ است.

۱/۶) شرایط قضیه رل برقرار و نقطه مورد نظر $x = \pi$ است.

۲/۱) شرایط قضیه مقدار میانگین برقرار و نقطه مورد نظر $x = \frac{1}{2}$ است.

۲/۲) شرایط قضیه مقدار میانگین برقرار و نقطه مورد نظر $x = \sin^{-1}(\frac{2}{\pi-2})$ است.

۲/۳) تابع در $x = -1$ پیوسته نیست، لذا شرایط قضیه مقدار میانگین برقرار نمی‌باشد.

۲/۴) شرایط قضیه مقدار میانگین برقرار و نقطه مورد نظر $x = \ln(e-1)$ است.

۲/۵) شرایط قضیه مقدار میانگین برقرار و نقطه مورد نظر $x = \frac{8}{3\sqrt{3}}$ است.

۲/۶) تابع در $x = 0$ تعریف نمی‌شود پس در فاصله $[0,1]$ پیوسته نیست، لذا شرایط قضیه مقدار میانگین برقرار نمی‌باشد.

۳/۱) $\sin x = 1 - \frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{2})^2 + \frac{1}{4!}(x-\frac{\pi}{2})^4 - \frac{1}{6!}(x-\frac{\pi}{2})^6 + \cdots$

۳/۲) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$

۳/۳) $Ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$

۳/۴) $e^x = e + e(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \frac{e}{3!}(x-1)^3 + \cdots$

۳/۵) $\frac{1}{x^2} = 1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 - 4(x-1)^3 + \cdots$

۳/۶) $Ln(x^2) = 2(x-1) - (x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{2}(x-1)^4 + \cdots$

۳/۷) $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$

۳/۸) $\sqrt{x+1} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \cdots$

۴/۱) $e^{-2x} = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \cdots$

۴/۲) $\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + \cdots$

۴/۳) $\sin 4x = 4x - \frac{(4x)^3}{3!} + \frac{(4x)^5}{5!} - \frac{(4x)^7}{7!} + \cdots$

۴/۴) $Ln(x^2+1) = \ln 2 + (x-1) - \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{8}(x-1)^4 - \cdots$

$۵/۱)\ \sin x + \cos x = ۱ + x - \frac{x^۲}{۲!} - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۴}{۴!} + \frac{x^۵}{۵!} - \frac{x^۶}{۶!} - \frac{x^۷}{۷!} + \cdots$

$۵/۲)\ \sinh x = \frac{۱}{۲}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} + \frac{x^۷}{۷!} \cdots$

$۵/۳)\ \frac{\ln x}{x-۱} = ۱ - \frac{۱}{۲}(x-۱) + \frac{۱}{۳}(x-۱)^۲ - \frac{۱}{۴}(x-۱)^۳ + \cdots$

$۵/۴)\ x^۳ \cos x = x^۳ - \frac{x^۵}{۲!} + \frac{x^۷}{۴!} - \frac{x^۹}{۶!} + \cdots$

$۶/۱)\ x = -۰/۷۵۴$ (تقریب اولیه $x_۱ = -۱$) $۶/۲)\ x = ۱/۱۶۴$ (تقریب اولیه $x_۱ = ۱$)

$۶/۳)\ x = ۲/۳۸۰$ (تقریب اولیه $x_۱ = ۲$) $۶/۴)\ x = ۰/۳۱۴$ (تقریب اولیه $x_۱ = ۱$)

تمرین‌های صفحه ۱۹۳ :

$۱/۱)\ f'(x) = -۱ - ۲x$

x	$-\infty$		$-\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
f'		+	۰	−	
f		↗	$\frac{۱۳}{۴}$	↘	

$۱/۲)\ f'(x) = ۸x - ۴$

x	$-\infty$		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
f'		−	۰	+	
f		↘	۰	↗	

$۱/۳)\ f'(x) = ۳x^۲ + ۲$

x	$-\infty$		$+\infty$
f'		+	
f		↗	

$۱/۴)\ f'(x) = ۶x - ۳x^۲$

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
f'		−	۰	+	۰	−	
f		↘	−۲	↗	۲	↘	

$۱/۵)\ f'(x) = ۴x - ۴x^۳$

x	$-\infty$		−۱		۰		۱		$+\infty$
f'		+	۰	−	۰	+	۰	−	
f		↗	۱	↘	۰	↗	۱	↘	

$۱/۶)\ f'(x) = ۴x^۳ + ۴$

x	$-\infty$		−۱		$+\infty$
f'		−	۰	+	
f		↘	−۲	↗	

$۱/۷)\ f'(x) = \frac{-۱}{۲x^۲}$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
f'		−	ن	−	
f		↘	ن	↘	

$۱/۸)\ f'(x) = \frac{۲}{(۱-x)^۲}$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
f'		+	ن	+	
f		↗	ن	↗	

$۱/۹)\ f'(x) = \frac{-۲x}{(x^۲+۱)^۲}$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
f'		+	۰	−	
f		↗	۱	↘	

$۱/۱۰)\ f'(x) = \frac{۱-x^۲}{(x^۲+۱)^۲}$

x	$-\infty$		−۱		۱		$+\infty$
f'		−	۰	+	۰	−	
f		↘	$-\frac{۱}{۲}$	↗	$\frac{۱}{۲}$	↘	

$۱/۱۱)\ f'(x) = \frac{۱-۲x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}}$

x	−۱		$\frac{-۱}{\sqrt{۲}}$		$\frac{۱}{\sqrt{۲}}$		۱
f'		−	۰	+	۰	−	
f	۰	↘	$-\frac{۱}{۲}$	↗	$\frac{۱}{۲}$	↘	۰

$۱/۱۲)\ f'(x) = \frac{۱۲-۳x}{۲\sqrt{۶-x}}$

x	$-\infty$		۴		۶
f'		+	۰	−	
f		↗	$۴\sqrt{۲}$	↘	۰

$۱/۱۳)\ f'(x) = \frac{x(۳x-۴)}{۳\sqrt[۳]{(x^۳-۲x^۲)^۲}}$

x	$-\infty$		۰		$\frac{۴}{۳}$		۲		$+\infty$
f'		+	ن	−	۰	+	ن	+	
f		↗	۰	↘	$\frac{-۲\sqrt[۳]{۴}}{۳}$	↗	۰	↗	

$۱/۱۴)\ f'(x) = \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
f'		−	ن	+	
f		↘	۰	↗	

$۱/۱۵)\ f'(x) = ۱ - \sin x$

x	۰		$\frac{\pi}{۲}$		۲π
f'		+	۰	+	
f	۱	↗	$\frac{\pi}{۲}$	↗	$۲\pi+۱$

$۱/۱۶)\ f'(x) = ۱ - ۲\cos x$

x	۰		$\frac{\pi}{۳}$		$\frac{۵\pi}{۳}$		۲π
f'		−	۰	+	۰	−	
f	۰	↘	$\frac{\pi}{۳}-\sqrt{۳}$	↗	$\frac{۵\pi}{۳}+\sqrt{۳}$	↘	۲π

$$1/17)\ f'(x)=\begin{cases}2x & x>۰\\ ۰ & x=۰\\ -2x & x<۰\end{cases}$$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
f'		+	۰	+	
f		↗	۰	↗	

$$1/18)\ f'(x)=\begin{cases}2x & x<-۱ \text{ یا } ۱<x\\ \text{ندارد} & x=\pm۱\\ -2x & -۱<x<۱\end{cases}$$

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
f'		−	ن	+	۰	−	ن	+	
f		↘	۰	↗	۱	↘	۰	↗	

$$1/19)\ f'(x)=\frac{۲-\ln x}{۲x\sqrt{x}}$$

x	۰		$e^{۲}$		$+\infty$
f'		+	۰	−	
f		↗	$۲e^{-۱}$	↘	

$$1/20)\ f'(x)=xe^{x}(۲+x)$$

x	$-\infty$		-۲		۰		$+\infty$
f'		+	۰	−	۰	+	
f		↗	$۴e^{-۲}$	↘	۰	↗	

۲/۱) نقاط بحرانی : ۰ و ۱ و ۳ ، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب ۵ و ۱

۲/۲) نقاط بحرانی : ۴- و ۱- و ۱ ، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب ۲ و ۷-

۲/۳) نقاط بحرانی : ۳- و ۲- و ۲ و ۵ ، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب ۶۶ و ۱۵-

۲/۴) نقاط بحرانی : ۲- و ۱- و ۰ و ۱ ، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب ۹ و ۰

۲/۵) نقاط بحرانی : ۳- و ۱- و ۰ و ۱ و ۲ ، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب ۶۵ و ۱

۲/۶) نقاط بحرانی : ۲- و ۱- و ۰ و ۱ و ۲ ، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب ۵۵ و ۵۷-

۲/۷) نقاط بحرانی : ۱ و ۲ ، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب $\frac{۱}{۲}$ و ۰

۲/۸) نقاط بحرانی : $\frac{۱}{۲}$ و ۱ و ۲ ، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب $\frac{۵}{۲}$ و ۲

۲/۹) نقاط بحرانی : ۰ و ۲ و ۳ ، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب ۲ و ۰

۲/۱۰) نقاط بحرانی : $۲-$ و $۱-$ و $\frac{-۱}{۲}$ و ۰ و ۱ ، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب ۲ و $\frac{۱}{۴}$

۲/۱۱) نقاط بحرانی : ۱ و ۲ و ۱۰ ، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب ۴ و ۰

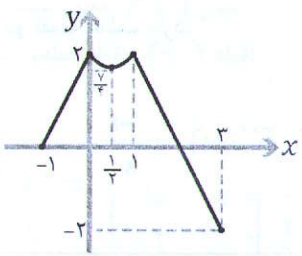
۲/۱۲) نقاط بحرانی : ۱- و ۰ و ۲ ، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب ۳ و $\sqrt{۵}$

۲/۱۳) نقاط بحرانی : $\pi-$ و $\frac{-۵\pi}{۶}$ و $\frac{-\pi}{۶}$ و π ، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب $\pi+۲$ و $\frac{-\pi}{۶}-\sqrt{۳}$

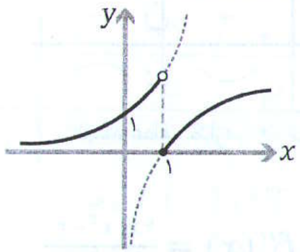
۲/۱۴) نقاط بحرانی : ۰ و $\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{\pi}{۳}$ ، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب $\sqrt{۲}$ و ۱

۲/۱۵) نقاط بحرانی :۱ و e و $e^{۲}$ ، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب $\frac{۱}{e}$ و ۰

۲/۱۶) نقاط بحرانی : ۰ و ۱ و ۲ ، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب $\frac{۱}{e}$ و ۰



۳/۱) ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب ۲ و ۲- می‌باشد. تابع در نقاط (۰,۲) و (۱,۲) ماکزیمم نسبی و در نقطه $(\frac{۱}{۲},\frac{۷}{۴})$ می‌نیمم نسبی دارد.



۳/۲) ماکزیمم مطلق ندارد و می‌نیمم نسبی برابر صفر است. تابع نقطه ماکزیمم نسبی ندارد و نقطه (۱,۰) می‌نیمم نسبی است.

$$۴/۱)\ f''(x)=۶$$

x	$-\infty$		$+\infty$
f''		+	
f		◡	

نقطه عطف ندارد.

$$۴/۲)\ f''(x)=۸$$

x	$-\infty$		$+\infty$
f''		+	
f		◡	

نقطه عطف ندارد.

۴/۳) $f''(x) = ۶(x-۱)$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
f''		−	•	+	
f		$\frown$	−۱	$\smile$	

یک نقطه عطف دارد.

۴/۴) $f''(x) = ۶(x-۱)$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
f''		−	•	+	
f		$\frown$	۲	$\smile$	

یک نقطه عطف دارد.

۴/۵) $f''(x) = ۱۲x^۲$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
f''		+	•	+	
f		$\smile$	−۱	$\smile$	

نقطه عطف ندارد.

۴/۶) $f''(x) = ۱۲x(x-۱)$

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
f''		+	•	−	•	+	
f		$\smile$	•	$\frown$	−۱	$\smile$	

دو نقطه عطف دارد.

۴/۷) $f''(x) = \frac{۱۲}{(۲x-۱)^۳}$

x	$-\infty$		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
f''		−	ن	+	
f		$\frown$	ن	$\smile$	

نقطه عطف ندارد.

۴/۸) $f''(x) = \frac{-۲}{x^۳}$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
f''		+	ن	−	
f		$\smile$	ن	$\frown$	

نقطه عطف ندارد.

۴/۹) $f''(x) = \frac{۲}{x^۳}$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
f''		−	ن	+	
f		$\frown$	ن	$\smile$	

نقطه عطف ندارد.

۴/۱۰) $f''(x) = \frac{۲x(x^۲-۳)}{(x^۲+۱)^۳}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{۳}$		۰		$\sqrt{۳}$		$+\infty$
f''		−	•	+	•	−	•	+	
f		$\frown$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۴}$	$\smile$	•	$\frown$	$\frac{\sqrt{۳}}{۴}$	$\smile$	

سه نقطه عطف دارد.

۴/۱۱) $f''(x) = \frac{-۱}{۴\sqrt{x^۳}}$

x	۰		$+\infty$
f''		−	
f		$\frown$	

نقطه عطف ندارد.

۴/۱۲) $f''(x) = \frac{-(۲x^۲+۹)}{(۹-x^۲)\sqrt{۹-x^۲}}$

x	−۳		۳
f''		−	
f		$\frown$	

نقطه عطف ندارد.

۴/۱۳) $f''(x) = \frac{-۲}{۹\sqrt[۳]{x^۵}}$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
f''		+	ن	−	
f		$\smile$	•	$\frown$	

چون $f'(۰)$ موجود نیست لذا نقطه $(۰,۰)$ ، نقطه عطف نمی‌باشد.

۴/۱۴) $f''(x) = \frac{-۲}{۹\sqrt[۳]{x^۴}}$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
f''		−	ن	−	
f		$\frown$	•	$\frown$	

در هر فاصله به طور جداگانه ، تقعر به سمت پایین است و نقطه عطف ندارد.

۴/۱۵) $f''(x) = \begin{cases} ۲ & x < -۲ \text{ یا } ۰ < x \\ \text{ندارد} & x = -۲ \text{ و } ۰ \\ -۲ & -۲ < x < ۰ \end{cases}$

x	$-\infty$		−۲		۰		$+\infty$
f''		+	ن	−	ن	+	
f		$\smile$	•	$\frown$	•	$\smile$	

چون $f'(-۲)$ و $f'(۰)$ موجود نیست لذا نقاط $(۰,۰)$ و $(-۲,۰)$ ، نقاط عطف نمی‌باشند.

۴/۱۶) $f''(x) = \begin{cases} ۲ & x > ۰ \\ \text{ندارد} & x = ۰ \\ -۲ & x < ۰ \end{cases}$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
f''		−	ن	+	
f		$\frown$	•	$\smile$	

چون $f'(۰)$ موجود است، پس نقطه $(۰,۰)$ ، نقطه عطف می‌باشد.

۴/۱۷) $f''(x) = -\cos x$

x	۰		$\frac{\pi}{۲}$		$\frac{۳\pi}{۲}$		۲π
f''		−	•	+	•	−	
f		$\frown$	$\frac{\pi}{۲}$	$\smile$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frown$	

دو نقطه عطف دارد.

۴/۱۸) $f''(x) = -\sin x$

x	۰		π		۲π
f''		−	•	+	
f		$\frown$	π	$\smile$	

یک نقطه عطف دارد.

۴/۱۹) $f''(x) = \frac{۱}{x}$

x	$\bullet$		$+\infty$
f''		$+$	
f		$\cup$	

نقطه عطف ندارد.

۴/۲۰) $f''(x) = e^x(۲ + x)$

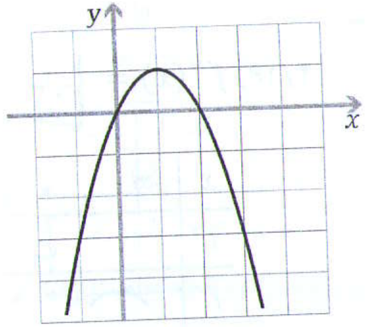
x	$-\infty$	-۲	$+\infty$
f''	$-$	$\bullet$	$+$
f	$\cap$	$-۲e^{-۲}$	$\cup$

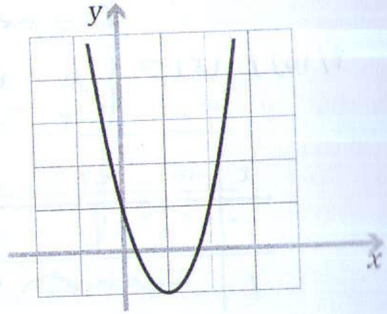
یک نقطه عطف دارد.

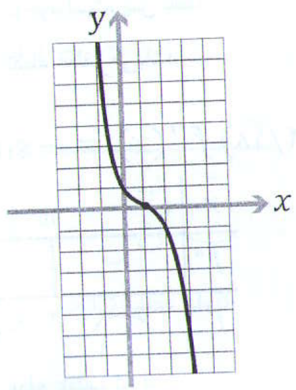
۵/۱) $\begin{cases} f(۱) = ۲ \\ f''(۱) = ۰ \end{cases} \rightarrow (a = -۱$ و $b = ۳)$

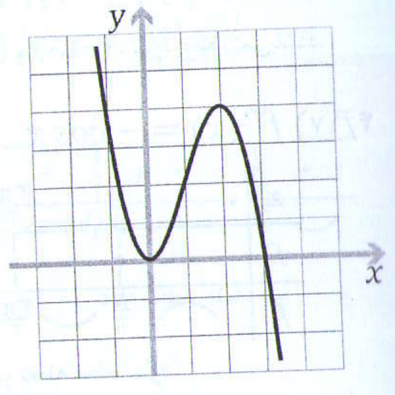
۵/۲) $\begin{cases} f'(۱) = ۰ \\ f''(۲) = ۰ \end{cases} \rightarrow (a = -۶$ و $b = ۹)$

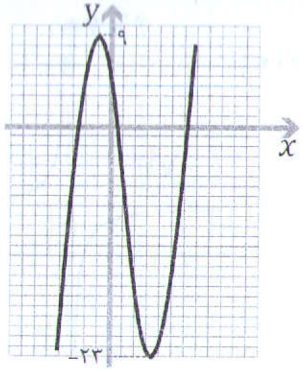
تمرین‌های صفحه ۲۰۶ :

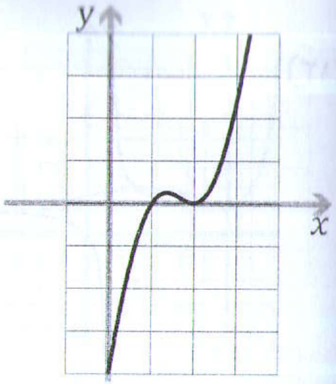
۱/۱)


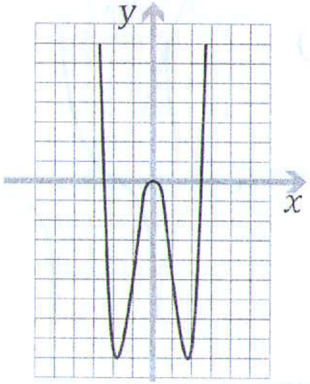
۱/۲)


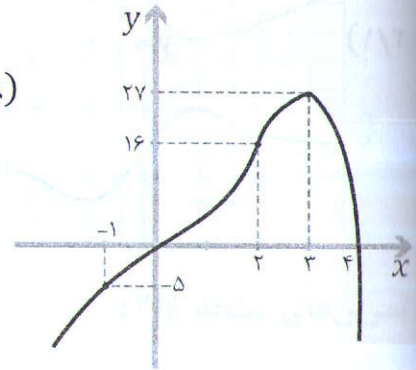
۱/۳)


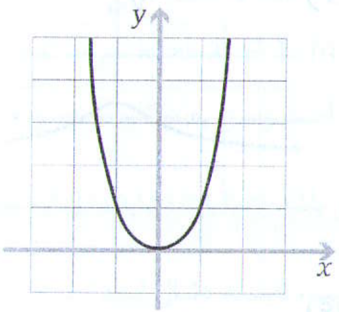
۱/۴)


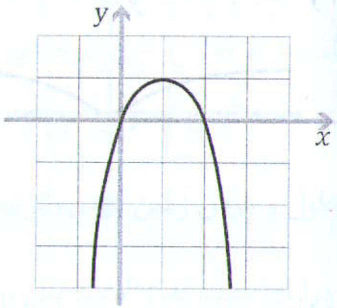
۱/۵)


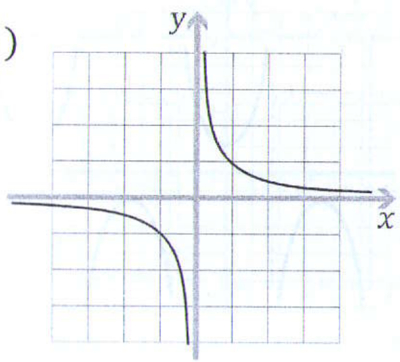
۱/۶)


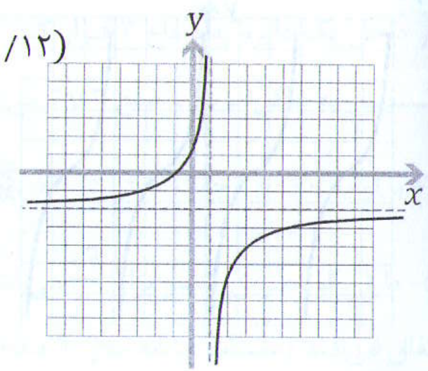
۱/۷)


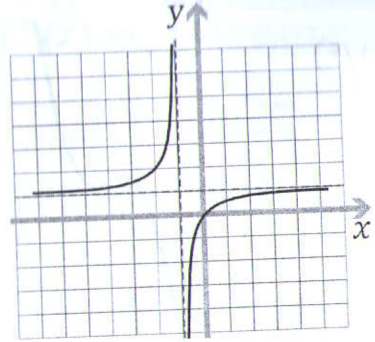
۱/۸)


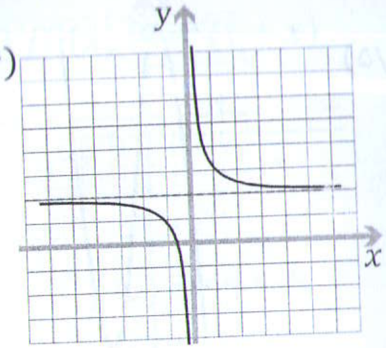
۱/۹)


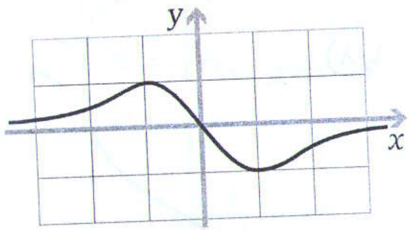
۱/۱۰)


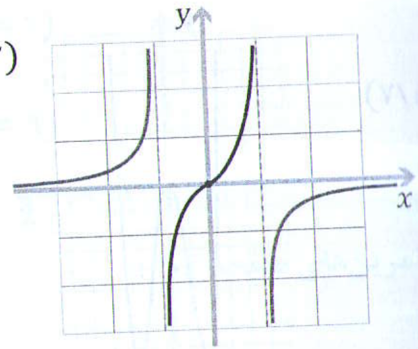
۱/۱۱)


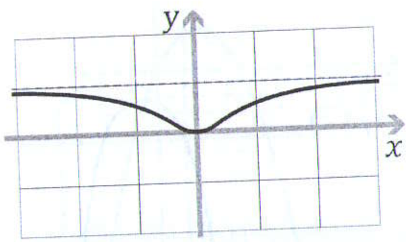
۱/۱۲)


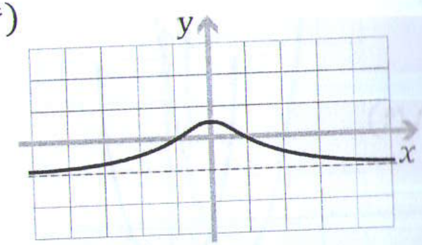
۱/۱۳)


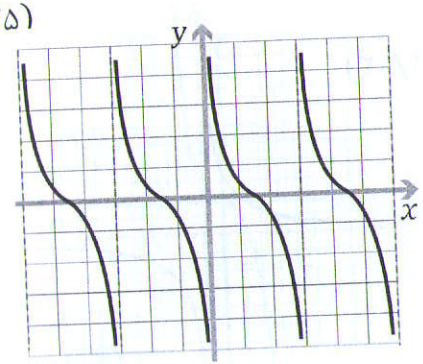
۱/۱۴)


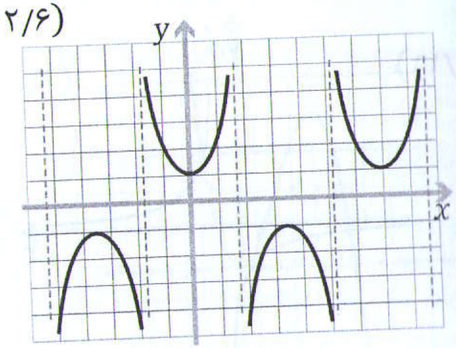
۲/۱)


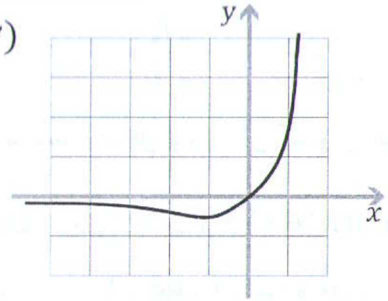
۲/۲)


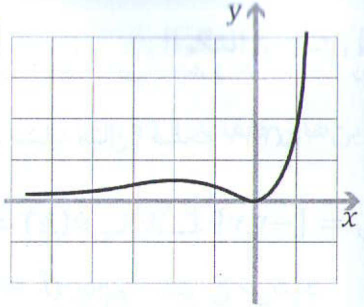
۲/۳)


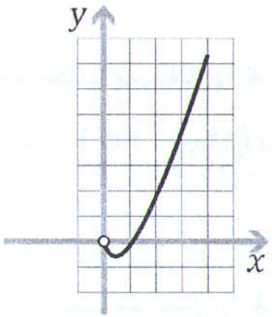
۲/۴)


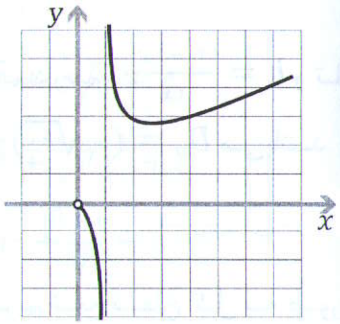
۲/۵)


۲/۶)


۲/۷)


۲/۸)


۲/۹)


۲/۱۰)


تمرین‌های صفحه ۲۱۸ :

۱- اگر یکی از اضلاع مستطیل را x فرض کنیم، تابع محیط به صورت $p(x) = ۲(x + \frac{۴۰۰}{x})$ با دامنه $D_p = (۰, +\infty)$ خواهد بود. با انتخاب $x = ۲۰m$ محیط می‌نیمم و در نتیجه هزینه حصارکشی کمترین می‌شود. لازم به توضیح است زمین به شکل مربع در می‌آید.

۲- طول و عرض زمین باید به ترتیب ۱۰۰ و ۵۰ متر باشد (عملیات مشابه مثال ۱ صفحه ۲۰۸).

۳- درازای چوب ثابت است؛ پس برای حجم ماکزیمم، باید به دنبال ابعاد مستطیلی بود که در داخل یک دایره به شعاع ۳ قرار گیرد و بیشترین مساحت را نیز داشته باشد. این مستطیل به شکل مربع با ضلع $۳\sqrt{۲}$ می‌باشد (عملیات مشابه مثال ۸ صفحه ۲۱۳).

۴- با تولید ۱۰,۰۰۰ جفت کفش در ماه، سود ماکزیمم می‌شود (عملیات مشابه مثال ۲ صفحه ۲۰۹).

۵- طول کوتاهترین مسیر برابر $\frac{\sqrt{۷}}{۲}$ می‌باشد که در نقطه‌ای به طول $x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ یا $x = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ اتفاق می‌افتد (عملیات مشابه مثال ۹ صفحه ۲۱۴).

۶- با انتخاب $r = \sqrt[۳]{\frac{۴}{\pi}}\ m$ و $h = \frac{۴}{\sqrt[۳]{۲\pi}}\ m$ سطح کل استوانه می‌نیمم و در نتیجه ورق مصرف شده حداقل و وزن آن کمترین می‌شود (عملیات مشابه مثال ۶ صفحه ۲۱۱).

۷- تابع حجم به صورت $v(h) = \frac{۱}{۳}\pi(۹ - h^۲)(h + ۳)$ با دامنه $D_v = [-۳,۳]$ می‌باشد. به کمک قضیه اکسترمم مطلق و با انتخاب $H = ۴$ حجم بیشترین می‌شود.

۸- اگر ابعاد مکعب مستطیل را x ، $۲x$ و h در نظر بگیریم داریم: $h = \frac{۱۲۰ - ۲x^۲}{۳x}$ و تابع حجم به صورت $v(x) = \frac{۲}{۳}x(۱۲۰ - ۲x^۲)$ با دامنه $D_v = (۰, \sqrt{۶۰})$ می‌باشد. با انتخاب $x = \sqrt{۲۰}\ cm$ و در نتیجه ارتفاع برابر $h = \frac{۸\sqrt{۵}}{۳}\ cm$ حجم بیشترین می‌شود.

۹- اگر ابعاد مکعب مستطیل را x ، $۲x$ و h در نظر بگیریم تابع سطح کل به صورت $s(x) = ۴x^۲ + \frac{۲۱۶}{x}$ با دامنه $D_s = (۰, +\infty)$ خواهد بود. با انتخاب $x = ۳m$ سطح کل کمترین می‌شود و داریم: $h = ۴m$ ، $۲x = ۶m$

۱۰- تابع حجم به صورت $v(x) = ۴x(۶ - x)^۲$ با دامنه $D_v = [۰,۶]$ می‌باشد. به کمک قضیه اکسترمم مطلق و با انتخاب $x = ۲cm$ حجم قوطی بیشترین می‌شود.

۱۱- اگر ارتفاع مخروط را h در نظر بگیریم تابع حجم به صورت $v(h) = \frac{\pi}{۳}(۱۰۰h - h^۳)$ با دامنه $D_v = [۰,۱۰]$ می‌باشد. به کمک قضیه اکسترمم مطلق و با انتخاب $h = \frac{۱۰\sqrt{۳}}{۳}\ ft$ حجم خیمه بیشترین می‌شود.

۱۲- اگر x را تعداد سفارش در نظر بگیریم، تابع درآمد به صورت زیر می‌باشد:

$$R(x) = \begin{cases} ۴۰۰x & x \leq ۱۰۰ \\ x(۴۰۰ - ۰/۵(x - ۱۰۰)) & x > ۱۰۰ \end{cases} = \begin{cases} ۴۰۰x & x \leq ۱۰۰ \\ ۴۵۰x - ۰/۵x^۲ & x > ۱۰۰ \end{cases}$$

با عملیاتی مشابه (مثال ۱۰ صفحه ۲۱۵) مشاهده می‌شود که بیشترین درآمد زمانی حاصل می‌شود که تعداد سفارش ۴۵۰ کارت باشد.

فصل پنجم: انتگرال

تمرین‌های صفحه ۲۳۱ :

۱/۱) $\frac{۱}{۳}x^۳ - x^۲ + ۳x + c$

۱/۲) $\frac{۲}{۵}x^۵ - \frac{۵}{۳}x^۳ + x + c$

۱/۳) $\frac{-۱}{u} - \frac{۵}{۲}u^۲ + c$

۱/۴) $\frac{-۱}{u^۲} + \frac{۳}{u} + c$

۱/۵) $\frac{۳}{۵}\sqrt[۳]{z^۵} + \frac{۲}{۳}\sqrt{z^۳} + c$

۱/۶) $\frac{۴}{۳}\sqrt{z^۳} + ۲\sqrt{z} + c$

۱/۷) $\frac{۳}{۷}\sqrt[۳]{x^۷} + \frac{۳}{۲}\sqrt[۳]{x^۴} + c$

۱/۸) $\frac{۲}{۷}\sqrt{x^۷} + \frac{۲}{۳}\sqrt{x^۳} + c$

۱/۹) $\frac{۳}{۸}\sqrt[۳]{u^۸} + \frac{۱۸}{۷}\sqrt[۶]{u^۷} + c$

۱/۱۰) $\frac{۲}{۵}\sqrt{u^۵} + \frac{۳۰}{\sqrt[۶]{u}} + c$

۲/۱) $\frac{۲}{۵}(\frac{۱}{۲}x - ۲)^۵ + c$

۲/۲) $\frac{۱}{۲۵}(۵x - ۳)^۵ + c$

۲/۳) $\frac{۱}{۲۸}(۲x^۲ + ۳)^۷ + c$

۲/۴) $\frac{-۱}{۲۴}(۵ - x^۳)^۸ + c$

۲/۵) $\frac{-۱}{۲(x^۲+x)^۲} + c$

۲/۶) $\frac{-۱}{۳(x^۳+x)^۳} + c$

۲/۷) $\frac{۱}{۳}\sqrt{(۲x + ۳)^۳} + c$

۲/۸) $\frac{۳}{۴}\sqrt[۳]{(x + ۴)^۴} + c$

۲/۹) $\frac{۳}{۴}\sqrt[۳]{(x^۲ + ۱)^۲} + c$

۲/۱۰) $\frac{۱}{۴}\sqrt[۳]{(x^۳ + ۲)^۴} + c$

۲/۱۱) $\frac{-۲}{۳}\sqrt{(۱ + \frac{۱}{x})^۳} + c$

۲/۱۲) $\frac{۴}{۳}\sqrt{(۱ + \sqrt{x})^۳} + c$

۲/۱۳) $\frac{۱}{۵}\sqrt{(۲x + ۳)^۵} - \sqrt{(۲x + ۳)^۳} + c$

۲/۱۴) $\frac{۱}{۶}\sqrt{(۲x + ۲)^۳} - \sqrt{۲x + ۲} + c$

۲/۱۵) $\frac{۲}{۵}\sqrt{(x + ۱)^۵} - \frac{۴}{۳}\sqrt{(x + ۱)^۳} + ۲\sqrt{x + ۱} + c$

۲/۱۶) $\frac{۳}{۱۰}\sqrt[۳]{(x + ۱)^{۱۰}} - \frac{۶}{۷}\sqrt[۳]{(x + ۱)^۷} + \frac{۳}{۴}\sqrt[۳]{(x + ۱)^۴} + c$

تمرین‌های صفحه ۲۳۷ :

۱/۱) $3\sin^{-1} x + c$

۱/۲) $\frac{1}{2}\tan^{-1} x + c$

۱/۳) $\frac{5}{2}\tan^{-1} x + c$

۱/۴) $\frac{1}{2}\sin^{-1} x + c$

۱/۵) $4\sec^{-1}|x| + c$

۱/۶) $\frac{-2}{3}\sec^{-1}|x| + c$

۱/۷) $\sin^{-1}(\frac{x}{\sqrt{2}}) + c$

۱/۸) $3\sin^{-1}(\frac{x}{5}) + c$

۱/۹) $\frac{5}{2}\tan^{-1}(\frac{x}{2}) + c$

۱/۱۰) $\frac{4}{\sqrt{5}}\tan^{-1}(\frac{x}{\sqrt{5}}) + c$

۱/۱۱) $\frac{1}{2}\sin^{-1}(\frac{2x}{3}) + c$

۱/۱۲) $\frac{1}{6}\tan^{-1}(\frac{2x}{3}) + c$

۱/۱۳) $\frac{5}{2}\tan^{-1}(\frac{x+3}{2}) + c$

۱/۱۴) $2\sin^{-1}(\frac{x+3}{2}) + c$

۱/۱۵) $\sin^{-1}(\frac{x+1}{3}) + c$

۱/۱۶) $\frac{1}{4}\tan^{-1}(\frac{2x+1}{2}) + c$

۱/۱۷) $-\tan^{-1}(\cos x) +$

۱/۱۸) $\sin^{-1}(\frac{\sin x}{2}) + c$

۱/۱۹) $\frac{1}{2}\tan^{-1}(x^2) + c$

۱/۲۰) $2\tan^{-1}\sqrt{x} + c$

۲/۱) $\frac{-1}{5}e^{2-5x} + c$

۲/۲) $\frac{-1}{2}e^{4-x^2} + c$

۲/۳) $\frac{-1}{\ln 2}2^{\cos x} + c$

۲/۴) $\frac{-1}{2\ln 5}5^{3-2x} + c$

۲/۵) $\frac{-1}{2}\ln|3-2x| + c$

۲/۶) $\frac{5}{3}\ln|4+3x| + c$

۲/۷) $\frac{1}{3}\ln|x^3+1| + c$

۲/۸) $\frac{3}{2}\ln|x^2+4| + c$

۲/۹) $\frac{-1}{2}\ln|\cos 2x| + c$

۲/۱۰) $\frac{1}{7}\ln|\sin 7x| + c$

۲/۱۱) $\frac{1}{2}\ln|1+2\sin x| + c$

۲/۱۲) $\frac{1}{\ln 5}\ln|5^x+1| + c$

۳/۱) $\frac{-1}{4}\cos 4x + c$

۳/۲) $\frac{1}{3}\sin 3x + c$

۳/۳) $2\sin(\frac{x}{2}) + c$

۳/۴) $-3\cos(\frac{x}{3}) + c$

۳/۵) $2\sin\sqrt{x} + c$

۳/۶) $\cos(\frac{1}{x}) + c$

۳/۷) $-\frac{1}{3}\cos(x^3-1) + c$

۳/۸) $\frac{-3}{2}\sin(2-x^2) + c$

۳/۹) $\frac{1}{3}\tan 3x + c$

۳/۱۰) $\frac{-1}{5}\cot 5x + c$

۳/۱۱) $\frac{1}{2}\tan 2x + c$

۳/۱۲) $\frac{-1}{2}\cot(x^2) + c$

۳/۱۳) $\frac{-1}{2}\csc(2x+3) + c$

۳/۱۴) $-\sec(2-x) + c$

۳/۱۵) $-2\sqrt{5+\cos x} + c$

۳/۱۶) $\frac{1}{4}(2+\sin x)^4 + c$

۳/۱۷) $\frac{1}{20}(\sin 5x)^4 + c$

۳/۱۸) $\frac{1}{4\cos 4x} + c$

۴/۱) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin 6x + c$

۴/۲) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{16}\sin 8x + c$

۴/۳) $\frac{-1}{4}\cos 4x + \frac{1}{12}(\cos 4x)^3 + c$

۴/۴) $\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{6}(\sin 2x)^3 + c$

۴/۵) $\frac{1}{4}(\sec 2x)^2 + c$

۴/۶) $\frac{-1}{6}\csc^2 3x + c$

۴/۷) $-\cot x - x + c$

۴/۸) $\frac{1}{2}\tan 2x - x + c$

۴/۹) $\frac{-1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$

۴/۱۰) $\frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{2}\sin x + c$

۵/۱) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6}$

۵/۲) $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + 1$

۵/۳) $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3} - 5$

۵/۴) $f(x) = \frac{-1}{2}\cos x^2 + \frac{5}{2}$

۵/۵) $f(x) = -\sin x + 2x + 1$

۵/۶) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1$

۲/۱۳) $ln|ln\, x| + c$

۲/۱۴) $\frac{۱}{۲}(ln\, x)^{۲} + c$

۲/۱۵) $\frac{-۱}{۲}e^{-۲x} - e^{-x} + c$

۲/۱۶) $\frac{۱}{ln(۹e)}(۹e)^{x} + c$

۲/۱۷) $sin^{-۱}(ln\, x) + c$

۲/۱۸) $tan^{-۱}(e^{x}) + c$

۳/۱) $\frac{۱}{۲}cosh(x^{۲} + ۱) + c$

۳/۲) $\frac{۱}{۳}sinh(۴ + x^{۳}) + c$

۳/۳) $-sinh(\frac{۱}{x}) + c$

۳/۴) $۲cosh\sqrt{x} + c$

۳/۵) $\frac{۱}{۳}tanh(x^{۳} + ۱) + c$

۳/۶) $coth(x^{۲} + x) + c$

۴/۱) $f(x) = sin^{-۱}x + \frac{\pi}{۶}$

۴/۲) $f(x) = \frac{۱}{۲}tan^{-۱}(\frac{x}{۲}) + \frac{\pi}{۲۴}$

۴/۳) $f(x) = \frac{۱}{۲}e^{۲x-۱} + \frac{۳}{۲}$

۴/۴) $f(x) = ln|x + ۳| + ۱$

۴/۵) $f(x) = \frac{۱}{۲}cosh۲x + \frac{۳}{۲}$

۴/۶) $f(x) = ۲sinh(\frac{x}{۲}) - ۱$

تمرین‌های صفحه ۲۴۵ :

۱/۱) $\frac{-۱}{۲}x\cos ۲x + \frac{۱}{۴}\sin ۲x + c$

۱/۲) $x\sin x + \cos x + c$

۱/۳) $x(ln\, x - ۱) + c$

۱/۴) $\frac{۱}{۲}x^{۲}ln(۳x) - \frac{۱}{۴}x^{۲} + c$

۱/۵) $\frac{۱}{۹}e^{۳x}(۳x - ۱) + c$

۱/۶) $-۲e^{-x}(x + ۱) + c$

۱/۷) $-x^{۲}\cos x + ۲x\sin x + ۲\cos x + c$

۱/۸) $\frac{۱}{۴}e^{۲x}(۲x^{۲} - ۲x + ۱) + c$

۱/۹) $x\cot^{-۱}x + \frac{۱}{۲}ln|۱ + x^{۲}| + c$

۱/۱۰) $x\sin^{-۱}x + \sqrt{۱ - x^{۲}} + c$

۱/۱۱) $۲\sqrt{x}\tan^{-۱}\sqrt{x} - ln|۱ + x| + c$

۱/۱۲) $\sin x\,(ln(\sin x) - ۱) + c$

۱/۱۳) $x(ln\, x)^{۲} - ۲x\, ln\, x + ۲x + c$

۱/۱۴) $\frac{۱}{۲}x^{۲}\tan^{-۱}x - \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۲}\tan^{-۱}x + c$

۲/۱) $۵x - ۱۳ln|x + ۲| + c$

۲/۲) $\frac{۱}{۲}x^{۲} + ۴x + ۴\, ln|x - ۱| + c$

۲/۳) $\frac{۱}{۲}x^{۲} + \frac{۱}{۲}tan^{-۱}(\frac{x}{۲}) + c$

۲/۴) $\frac{۱}{۳}x^{۳} + ۳x - \frac{۵۳}{۳}tan^{-۱}(\frac{x}{۳}) + c$

۲/۵) $-ln|x| + ln|x - ۴| + c$

۲/۶) $۲ln|x - ۲| + ۳\, ln|x + ۲| + c$

۲/۷) $۲ln|x| + ln|x - ۲| - ln|x + ۲| + c$

۲/۸) $ln|x| + ۲\, ln|x - ۱| + ۳\, ln|x - ۲| + c$

۲/۹) $ln|x| + \frac{۱}{x} + ۲\, ln|x + ۱| + c$

۲/۱۰) $ln|x| - ln|x - ۱| - \frac{۱}{x-۱} + c$

۲/۱۱) $ln|x - ۱| + tan^{-۱}x + c$

۲/۱۲) $۲ln|x| - tan^{-۱}x + c$

تمرین‌های صفحه ۲۵۰ :

۱/۱) $۲sin^{-۱}(\frac{x}{۲}) + \frac{۱}{۲}x\sqrt{۴ - x^{۲}} + c$

۱/۲) $۲sin^{-۱}(\frac{x}{۲}) - \frac{۱}{۲}x\sqrt{۴ - x^{۲}} + \frac{۱}{۴}x^{۳}\sqrt{۴ - x^{۲}} + c$

۱/۳) $-\frac{\sqrt{x^{۲}+۱}}{x} + c$

۱/۴) $\frac{۱}{۳}ln\left|\frac{\sqrt{۹+x^{۲}}-۳}{x}\right| + c$

۱/۵) $ln\left|x + \sqrt{x^{۲} - ۱}\right| + c$

۱/۶) $\frac{۱}{۵۴}cos^{-۱}(\frac{۳}{x}) + \frac{۱}{۱۸}\frac{\sqrt{x^{۲}-۹}}{x^{۲}} + c$

۲/۱) $\frac{۱}{۵}ln\left|۲\tan(\frac{x}{۲}) - ۱\right| - \frac{۱}{۵}ln\left|\tan(\frac{x}{۲}) + ۲\right| + c$

۲/۲) $-ln\left|۱ - \tan(\frac{x}{۲})\right| + c$

۲/۳) $ln\left|tan(\frac{x}{۲})\right| + c = ln|csc\,x - cot\,x| + c$ ۲/۴) $\frac{-۲}{tan(\frac{x}{۲})+۱} + c$

۲/۵) $ln\left|۱ + tan^۲(\frac{x}{۲})\right| + c = -ln|۱ + cos\,x| + c'$

۲/۶) $x - tan(\frac{x}{۲}) + c$

۲/۷) $\frac{۱}{۲}ln\left|tan(\frac{x}{۲})\right| - \frac{۱}{۴}\left(tan(\frac{x}{۲})\right)^۲ + c$

۲/۸) $-\frac{۱}{۲}ln\left|tan(\frac{x}{۲}) - ۱\right| + \frac{۱}{۲}ln\left|tan(\frac{x}{۲}) + ۱\right| + \frac{۱}{۱+tan(\frac{x}{۲})} - \frac{۱}{\left(۱+tan(\frac{x}{۲})\right)^۲} + c$

۳/۱) $x - \frac{x^۳}{۳!\times۳} + \frac{x^۵}{۵!\times۵} - \frac{x^۷}{۷!\times۷} + \cdots$

۳/۲) $\frac{x^۲}{۲!\times۲} - \frac{x^۴}{۴!\times۴} + \frac{x^۶}{۶!\times۶} - \frac{x^۸}{۸!\times۸} + \cdots$

۳/۳) $x - \frac{x^۵}{۲!\times۵} + \frac{x^۹}{۴!\times۹} - \frac{x^{۱۳}}{۶!\times۱۳} + \cdots$

۳/۴) $\frac{x^۳}{۳} - \frac{x^۷}{۳!\times۷} + \frac{x^{۱۱}}{۵!\times۱۱} - \frac{x^{۱۵}}{۷!\times۱۵} + \cdots$

۳/۵) $x - \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۵}{۲!\times۵} - \frac{x^۷}{۳!\times۷} + \frac{x^۹}{۴!\times۹} - \cdots$

۳/۶) $x + \frac{x^۴}{۴} + \frac{x^۷}{۲!\times۷} + \frac{x^{۱۰}}{۳!\times۱۰} + \frac{x^{۱۳}}{۴!\times۱۳} + \cdots$

فصل ششم: کاربرد انتگرال

تمرین‌های صفحه ۲۵۸ :

۱/۱) ۲۵ ۱/۲) ۱۲ ۱/۳) $\frac{۴۵}{۴}$ ۱/۴) $\frac{۳}{۴}$ ۱/۵) $\frac{۱۷}{۶}$

۱/۶) $\frac{-۱}{۶}$ ۱/۷) $\frac{۲۹}{۶}$ ۱/۸) $\frac{۲۳}{۱۴}$ ۱/۹) $\frac{۷۲}{۵}$ ۱/۱۰) $\frac{۳۰۰}{۷}$

۱/۱۱) $\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲}$ ۱/۱۲) $\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲}$ ۱/۱۳) $۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۱/۱۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۱/۱۵) ۱

۱/۱۶) $\sqrt{۲} - ۲$ ۱/۱۷) $\frac{\pi}{۶}$ ۱/۱۸) $\frac{\pi}{۱۲}$ ۱/۱۹) ۳ ۱/۲۰) ۶

۱/۲۱) $\frac{۳}{ln\,۲}$ ۱/۲۲) $\frac{۲۴}{۲۵\,ln\,۵}$ ۱/۲۳) $-۳\,ln\,۲$ ۱/۲۴) ۴

۲/۱) $\frac{۷}{۳}$ ۲/۲) $\frac{۵}{۲}$ ۲/۳) ۲

۲/۴) ۱ ۲/۵) $۲ - \frac{\pi^۲}{۲}$ ۲/۶) ۲

۳/۱) ۰ ۳/۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳/۳) $\frac{۲۶}{۳}$ ۳/۴) ۱۲

۳/۵) $\frac{۳}{۴}(۴ - \sqrt[۳]{۴})$ ۳/۶) $\frac{۷}{۳}$ ۳/۷) $\frac{۴۶}{۱۵}$ ۳/۸) $\frac{۱۰۴}{۵}$

۳/۹) $\frac{۲}{۳}$ ۳/۱۰) $\frac{-\sqrt{۲}}{۴}$ ۳/۱۱) $\frac{\pi}{۱۲}$ ۳/۱۲) $\frac{\pi-۲}{۱۶}$

۳/۱۳) $\frac{ln\,۲}{۲}$ ۳/۱۴) $\frac{ln\,۲}{۲}$ ۳/۱۵) $\frac{\pi}{۴}$ ۳/۱۶) $\frac{\pi}{۱۲}$

۳/۱۷) $\frac{ln\,۵}{۲}$ ۳/۱۸) $۲\,ln\,۲$ ۳/۱۹) $ln\,۲$ ۳/۲۰) $ln\,۳$

۳/۲۱) $\frac{۱}{۳}(e^۷ - ۱)$ ۳/۲۲) $\frac{۱}{۵}(e - e^{-۳})$ ۳/۲۳) $\frac{۷}{ln\,۲}$ ۳/۲۴) $\frac{۲۴}{۵\,ln\,۵}$

۳/۲۵) $\frac{۱}{۴}(e^۲ + ۱)$ ۳/۲۶) $\frac{۸-\sqrt{۲}(\pi-۴)}{۸}$ ۳/۲۷) $\frac{۱}{۲}(۲ln\,۳ - ln\,۵)$

۳/۲۸) $ln\,۲ + tan^{-۱}\,۴ - tan^{-۱}\,۲$

تمرین‌های صفحه ۲۶۵ :

۱/۱) $\frac{۱}{۴}\left(۰ + \frac{\sqrt{۷}}{\sqrt{۲}} + ۲ + \frac{۳}{\sqrt{۲}} + \sqrt{۲}\right) = ۱/۸۵۱۵$

۱/۲) $\frac{۱}{۴}\left(۱ + \frac{۳۲}{۱۷} + ۱ + \frac{۳۲}{۹۷} + \frac{۱}{۱۷}\right) = ۱/۰۶۷۸$

۱/۳) $\frac{\pi}{۱۶}\left(۰ + \sqrt{\frac{\pi}{۲}}cos\frac{\pi}{۸} + \sqrt{\pi}\,cos\frac{\pi}{۴} + \sqrt{\frac{۳\pi}{۲}}cos\frac{۳\pi}{۸} + ۰\right) = ۰/۶۳۶۶$

۱/۴) $\frac{\pi}{۱۶}\left(\frac{۲}{\pi} + \frac{۱۶}{۵\pi}sin(\frac{۵\pi}{۸}) + \frac{۸}{۳\pi}sin(\frac{۳\pi}{۴}) + \frac{۱۶}{۷\pi}sin(\frac{۷\pi}{۸}) + ۰\right) = ۰/۴۸۲۲$

۲/۱) $\int_{-۱}^{۱}(x^۲ - \frac{۱}{۶}x^۶ + \frac{۱}{۱۲۰}x^{۱۰})dx = \frac{۲۸۶۷}{۴۶۲۰} = ۰/۶۲۰۵$

۲/۲) $\int_۰^۱(۱ - \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۲۴}x^۲)dx = \frac{۵۵}{۷۲} = ۰/۷۶۳۸$

۲/۳) $\int_۱^۲(\frac{۱}{x} + ۱ + \frac{۱}{۲}x)dx = \frac{۷}{۴} + \ln ۲ = ۲/۴۴۳۲$

۲/۴) $\int_۰^۱(۱ + x^۳ + \frac{۱}{۲}x^۶)dx = \frac{۳۷}{۲۸} = ۱/۳۲۱۴$

۳/۱) ۲/۰۷۳۶   ۳/۲) ۶/۶۴۵۳   ۳/۳) ۲/۰۲۷۲   ۳/۴) ۲/۳۴۳۲

۴/۱) $g'(x) = \sqrt{x^۳ + ۱}$ ۴/۲) $f'(t) = \sin(t^۲)$

۴/۳) $f'(t) = \frac{-۱}{t^۴+۱}$ ۴/۴) $g'(x) = \frac{-x^۲}{\sqrt{x^۲+۳}}$

۴/۵) $h'(x) = \frac{x}{۲\sqrt{x}(x+۱)}$ ۴/۶) $h'(x) = \frac{۲\sin(x^۲)}{x}$

۴/۷) $f'(x) = \frac{-۱}{x^۲}\sin^۴(\frac{۱}{x})$ ۴/۸) $f'(t) = (۱ + \tan^۲ t)^۲$

تمرین‌های صفحه ۲۷۴ :

۱/۱) $S = \int_{-۲}^{\frac{۱}{۲}}(۱ - ۲x)\,dx = \frac{۲۵}{۴}$

۱/۲) $S = -\int_۰^۴(x^۲ - ۴x)dx = \frac{۳۲}{۳}$

۱/۳) $S = s_۱ + s_۲ = ۲s_۲ = ۲\int_۱^۲(x - ۱)^۳dx = \frac{۱}{۲}$

۱/۴) $S = s_۱ + s_۲ = \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\cos x\,dx - \int_{\frac{\pi}{۲}}^{\frac{۳\pi}{۲}}\cos x\,dx = ۳ + \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۱/۵) $S = \int_۰^۳\frac{۱}{x+۱}dx = ۲\ln ۲$ ۱/۶) $S = \int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\tan x\,dx = \frac{۱}{۲}\ln ۲$

۱/۷) $y = \ln x \to x = e^y\ ,\ S = \int_a^b f(y)\,dy = \int_۰^e e^y\,dy = e^e - ۱$

۱/۸) $S = s_۱ + s_۲ = \int_۰^۱ x^۲dx + \int_۱^۴\sqrt{x}\,dx = ۵$

۲/۱) $S = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}}((x + ۱) - \sin x)\,dx = \frac{\pi^۲}{۸} + \frac{\pi}{۲} - ۱$

۲/۲) $S = \int_۰^۱(e^x - \sqrt{x})dx = e - \frac{۵}{۳}$

۲/۳) $S = \int_{-۱}^۲((x + ۲) - x^۲)\,dx = \frac{۹}{۲}$

۲/۴) $S = \int_۰^۲((۴x - x^۲) - x^۲)\,dx = \frac{۸}{۳}$

۲/۵) $S = s_۱ + s_۲ = ۲s_۲ = ۲\int_۰^۱(x - x^۳)\,dx = \frac{۱}{۲}$

۲/۶) $S = s_۱ + s_۲ = ۲s_۲ = ۲\int_۰^۱(x - x^۲)dx = \frac{۱}{۳}$

۲/۷) $S = \int_۱^e(x - \ln x)\,dx = \frac{e^۲-۳}{۲}$

۲/۸) $S = s_۱ + s_۲ = \int_{-\frac{۴}{۳}}^{۰}((۴ - x) - (-۴x))\,dx + \int_۰^۱((۴ - x) - (۳x))\,dx$

$= \frac{۸}{۳} + ۲ = \frac{۱۴}{۳}$

تمرین‌های صفحه ۲۸۳ :

۱/۱) $V = \pi\int_{-۱}^۲(x^۲ + ۱)^۲\,dx = \frac{۷۸\pi}{۵}$

۱/۲) $V = \pi\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\cos^۲ x\,dx = \frac{\pi^۲}{۲}$

۱/۳) $V = \pi\int_۱^۴(\frac{۱}{x})^۲\,dx = \frac{۳\pi}{۴}$

۱/۴) $V = \pi\int_{-۱}^۲(e^{-x})^۲\,dx = \frac{\pi}{۲}(e^۲ - e^{-۴})$

۱/۵) $V = \pi\int_۰^۳\left(\sqrt{۴ - (x - ۱)^۲}\right)^۲\,dx = ۹\pi$

۱/۶) $V = v_۱ + v_۲ = \pi\int_{-۱}^۰(\sqrt{-x})^۲\,dx + \pi\int_۰^۴(\sqrt{x})^۲\,dx = \frac{۱۷\pi}{۲}$

۱/۷) $V = \pi\int_۰^{\frac{۵}{۳}}(\frac{۵-۳y}{۲})^۲\,dy = \frac{۱۲۵\pi}{۳۶}$

۱/۸) $V = \pi \int_{۰}^{\ln ۴} (e^{y})^{۲}\, dy = \frac{۱۵\pi}{۲}$

۲/۱) $V = \pi \int_{۰}^{۴} (۲^{۲} - (\sqrt{x})^{۲})\, dx = ۸\pi$

۲/۲) $V = \pi \int_{-۲}^{۲} (۳^{۲} - (\frac{۱}{۲}x^{۲} + ۱)^{۲})\, dx = \frac{۳۵۲\pi}{۱۵}$

۲/۳) $V = \pi \int_{۰}^{\pi} ((۱ + \sin x)^{۲} - \sin^{۲} x)\, dx = \pi^{۲} + ۴\pi$

۲/۴) $V = \pi \int_{۰}^{\ln ۴} ((e^{x})^{۲} - (e^{-x})^{۲})\, dx = \frac{۲۲۵\pi}{۳۲}$

۲/۵) $V = \pi \int_{۰}^{۱} ((\sqrt{x})^{۲} - (x^{۳})^{۲})\, dx = \frac{۵\pi}{۱۴}$

۲/۶) $V = \pi \int_{-۲}^{۱} (۳^{۲} - (\sqrt{۴ - x^{۲}})^{۲})\, dx = ۱۸\pi$

۲/۷) $V = v_{۱} + v_{۲} = \pi \int_{\frac{۱}{۸}}^{\frac{۱}{۲}} \left((۴x)^{۲} - (\frac{۱}{۲})^{۲}\right) dx + \pi \int_{\frac{۱}{۲}}^{۲} \left((\frac{۱}{x})^{۲} - (\frac{۱}{۲})^{۲}\right) dx = \frac{۲۷\pi}{۱۶}$

۲/۸) $V = v_{۱} + v_{۲} = \pi \int_{-۲}^{-۱} ((x^{۲} + ۱)^{۲} - (x + ۳)^{۲})\, dx$

$+ \pi \int_{-۱}^{۲} ((x + ۳)^{۲} - (x^{۲} + ۱)^{۲})\, dx = \frac{۴۹۴\pi}{۱۵}$

۳) از دوران سطح محصور بین منحنی‌های $x = \sqrt{۶۴ - y^{۲}}$ و $x = ۰$ و $y = ۳$ حول محور yها، حجم مخزن را می‌توان به‌دست آورد.

$V = \pi \int_{-۸}^{۳} (\sqrt{۶۴ - y^{۲}})^{۲}\, dy = \frac{۱۵۷۳\pi}{۳}$

۴) ابتدا معادله یک سهمی که از نقاط $(-۴,۲)$ ، $(۰,۱)$ و $(۲,\frac{۵}{۴})$ می‌گذرد را به‌دست آورید (مشابه مثال ۲۱ صفحه ۲۷۹) سپس از دوران سطح محصور این سهمی و خطوط $x = -۴$ و $x = ۲$ و $y = ۰$ حول محور xها، حجم این قطعه به‌دست می‌آید.

$V = \pi \int_{-۴}^{۲} (\frac{۱}{۱۶}x^{۲} + ۱)^{۲}\, dx = \frac{۳۹۳\pi}{۴۰} = ۳۰/۸۶$

تمرین‌های صفحه ۲۸۹ :

۱/۱) $L = \int_{۰}^{۲} \sqrt{۱ + (-۲)^{۲}}\, dx = ۲\sqrt{۵}$

۱/۲) $L = \int_{۰}^{۴} \sqrt{۱ + (\frac{۳}{۲}\sqrt{x})^{۲}}\, dx = \frac{۸(۱۰\sqrt{۱۰} - ۱)}{۲۷}$

۱/۳) $L = \int_{۳}^{۶} \sqrt{۱ + (\frac{۳}{۲}\sqrt{x - ۲})^{۲}}\, dx = \frac{۸۰\sqrt{۱۰} - ۱۳\sqrt{۱۳}}{۲۷}$

۱/۴) $L = \int_{۰}^{۲} \sqrt{۱ + (\frac{-x}{\sqrt{۴ - x^{۲}}})^{۲}}\, dx = \pi$

۱/۵) $L = \int_{۰}^{۳} \sqrt{۱ + (۲x\sqrt{x^{۲} + ۱})^{۲}}\, dx = ۲۱$

۱/۶) $L = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \sqrt{۱ + (-\tan x)^{۲}}\, dx = \ln(\sqrt{۲} + ۱)$

۲/۱) $L = \int_{-۱}^{۲} \sqrt{۱ + (۲x)^{۲}}\, dx = ۶/۱۲۵۷$

۲/۲) $L = \int_{۱}^{۴} \sqrt{۱ + (\frac{۱}{x})^{۲}}\, dx = ۳/۳۴۲۸$

۲/۳) $L = \int_{۰}^{\frac{۲\pi}{۵}} \sqrt{۱ + (۱ + \tan^{۲} x)^{۲}}\, dx = ۳/۴۲۰۱$

۲/۴) $L = \int_{۰}^{۲\pi} \sqrt{۱ + (\cos x)^{۲}}\, dx = ۷/۶۴۰۰$

۳/۱) $A = ۲\pi \int_{-۱}^{\frac{۱}{۲}} (۳ - ۲x)\sqrt{۱ + (-۲)^{۲}}\, dx = \frac{۲۱\sqrt{۵}\pi}{۲}$

۳/۲) $A = ۲\pi \int_{۱}^{۳} \frac{۱}{۳}x^{۳} \sqrt{۱ + (x^{۲})^{۲}}\, dx = \frac{۲\sqrt{۲}\pi}{۹}(۴۱\sqrt{۴۱} - ۱)$

۳/۳) $A = ۲\pi \int_{۰}^{۱} \sqrt{۴ - x^{۲}} \sqrt{۱ + (\frac{-x}{\sqrt{۴ - x^{۲}}})^{۲}}\, dx = ۴\pi$

۳/۴) $A = ۲\pi \int_{۰}^{۳/۷۵} \sqrt{x} \sqrt{۱ + (\frac{۱}{۲\sqrt{x}})^{۲}}\, dx = \frac{۲۱\pi}{۲}$

۴) سطح یک کره به شعاع r، از دوران نیم دایره $y = \sqrt{r^۲ - x^۲}$ حول محور xها پدید می‌آید. پس داریم:

$$A = ۲\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^۲ - x^۲} \sqrt{۱ + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^۲-x^۲}}\right)^۲}\, dx = ۴\pi r^۲$$

تمرین‌های صفحه ۲۹۸:

۱/۱) $+\infty$ واگرا	۱/۲) ۲ همگرا	۱/۳) $-\infty$ واگرا
۱/۴) $\frac{۱}{۲}$ همگرا	۱/۵) $\frac{۱}{۲e^۲}$ همگرا	۱/۶) $+\infty$ واگرا
۱/۷) $+\infty$ واگرا	۱/۸) $\frac{\pi}{۲}$ همگرا	۱/۹) $+\infty$ واگرا
۱/۱۰) ۰ همگرا	۱/۱۱) واگرا زیرا انتگرال موجود نیست	۱/۱۲) واگرا زیرا انتگرال موجود نیست
۲/۱) $+\infty$ واگرا	۲/۲) -۶ همگرا	۲/۳) $\frac{۵}{۳}$ همگرا
۲/۴) $+\infty$ واگرا	۲/۵) $+\infty$ واگرا	۲/۶) $\frac{\pi}{۲}$ همگرا
۲/۷) واگرا زیرا انتگرال موجود نیست	۲/۸) $+\infty$ واگرا	۲/۹) ۲ همگرا
۲/۱۰) $\frac{۵}{۲}$ همگرا	۲/۱۱) ۳ همگرا	۲/۱۲) ۳ همگرا
۲/۱۳) $+\infty$ واگرا	۲/۱۴) $+\infty$ واگرا	

۳/۱) همگرا (مقایسه با: $\int_{۰}^{+\infty} \frac{۱}{x^۲+۱} dx = \frac{\pi}{۲}$) ۳/۲) همگرا (مقایسه با: $\int_{۱}^{+\infty} \frac{۱}{e^x} dx = \frac{۱}{e}$)

۳/۳) همگرا (مقایسه با: $\int_{۱}^{+\infty} \frac{۱}{\sqrt{x^۳}} dx = ۲$) ۳/۴) همگرا (مقایسه با: $\int_{۱}^{+\infty} \frac{۱}{x^۳} dx = \frac{۱}{۲}$)

۳/۵) واگرا (مقایسه با: $\int_{۰}^{+\infty} \frac{۱}{x+۲} dx = +\infty$) ۳/۶) واگرا (مقایسه با: $\int_{۲}^{+\infty} \frac{۱}{x} dx = +\infty$)

فصل هفتم: اعداد مختلط

تمرین‌های صفحه ۳۱۱:

۱/۱) $۸ - ۴i$	۱/۲) $۲ + ۴i$	۱/۳) $۱۹ - ۴i$
۱/۴) $۱۱ - ۱۶i$	۱/۵) $\frac{۱۹}{۱۳} + \frac{۴}{۱۳}i$	۱/۶) $\frac{۱۹}{۲۹} - \frac{۴}{۲۹}i$
۱/۷) $۲۱ - ۲۰i$	۱/۸) $-۹ - ۴۶i$	۱/۹) $\frac{۱۵۲+۸۴i}{۳۷۷}$
۱/۱۰) $\frac{۶۸-۲۸i}{۱۳}$		
۲/۱) $e^{\frac{۳\pi}{۲}i}$	۲/۲) $e^{\pi i}$	۲/۳) $۲\sqrt{۲}\, e^{-\frac{\pi}{۴}i}$
۲/۴) $۲\sqrt{۲}\, e^{\frac{۵\pi}{۴}i}$	۲/۵) $۲e^{-\frac{\pi}{۶}i}$	۲/۶) $۲e^{\frac{۵\pi}{۶}i}$
۳/۱) $\frac{-۳\sqrt{۲}}{۲} + \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}i$	۳/۲) $-۲ - ۲\sqrt{۳}i$	۳/۳) -۲
۳/۴) $-۳i$	۳/۵) $-\sqrt{۳} + i$	۳/۶) $\frac{-۵}{۲} + \frac{۵\sqrt{۳}}{۲}i$
۴/۱) ۱	۴/۲) $۳ - ۲i$	۴/۳) $\left(\frac{۲\sqrt{۳}-۳}{۲}\right) + \left(\frac{۲+۳\sqrt{۳}}{۲}\right)i$
۴/۴) $\frac{-۱}{۲} - \frac{۲+۵\sqrt{۳}}{۲}i$	۴/۵) $۶i$	۴/۶) $۲\sqrt{۳} + ۲i$
۴/۷) $۸i$	۴/۸) ۱۶	۴/۹) $۲^۹(-۱ - \sqrt{۳}i)$
۴/۱۰) $۲^{۱۲}$	۴/۱۱) $\frac{۱}{۸} - \frac{\sqrt{۳}}{۸}i$	۴/۱۲) -۱
۴/۱۳) $\frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}i$	۴/۱۴) $۲^۶(-۱ + \sqrt{۳}i)$	
۵/۱) $۳ + ۳\sqrt{۳}i$	۵/۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{۱}{۲}i$	

$۵/۳)\ -۱۸+۱۸\sqrt{۳}i$ $\qquad$ $۵/۴)\ -۲۱۶(\sqrt{۲}+\sqrt{۲}i)$

$۵/۵)\ (\ln ۲)+\frac{\pi}{۴}i$ $\qquad$ $۵/۶)\ (\ln ۳)+\frac{\pi}{۱۲}i$

$۶/۱)\ ۱\pm i$ $\qquad$ $۶/۲)\ -۲\pm i$

$۶/۳)\ -۳i\,,\,i$ $\qquad$ $۶/۴)\ \frac{(-۲+\sqrt{۳})-i}{۲}\,,\,\frac{(-۲-\sqrt{۳})-i}{۲}$

$۶/۵)\ ۳\,,\,\frac{-۳\pm۳\sqrt{۳}i}{۲}$ $\qquad$ $۶/۶)\ -۲\,,\,۱\pm\sqrt{۳}i$

$۶/۷)\ ۱\,,\,-۱\pm۳i$ $\qquad$ $۶/۸)\ ۲\,,\,\pm۲i$

$۶/۹)\ \pm۱\,,\,\pm\sqrt{۳}i$ $\qquad$ $۶/۱۰)\ \pm i\,,\,\pm\sqrt{۳}i$

$۷/۱)\ e^{\frac{\pi}{۴}i}\,,\,e^{\frac{۵\pi}{۴}i}$ $\qquad$ $۷/۲)\ ۲e^{\frac{\pi}{۳}i}\,,\,۲e^{\pi i}\,,\,۲e^{\frac{۵\pi}{۳}i}$

$۷/۳)\ \sqrt[۸]{۲}\,e^{\frac{\pi}{۱۶}i}\,,\,\sqrt[۸]{۲}\,e^{\frac{۹\pi}{۱۶}i}\,,\,\sqrt[۸]{۲}\,e^{\frac{۱۷\pi}{۱۶}i}\,,\,\sqrt[۸]{۲}\,e^{\frac{۲۵\pi}{۱۶}i}$

$۷/۴)\ \sqrt[۸]{۲}\,e^{\frac{۷\pi}{۱۶}i}\,,\,\sqrt[۸]{۲}\,e^{\frac{۱۵\pi}{۱۶}i}\,,\,\sqrt[۸]{۲}\,e^{\frac{۲۳\pi}{۱۶}i}\,,\,\sqrt[۸]{۲}\,e^{\frac{۳۱\pi}{۱۶}i}$

$۷/۵)\ ۲e^{\frac{\pi}{۵}i}\,,\,۲e^{\frac{۳\pi}{۵}i}\,,\,۲e^{\pi i}\,,\,۲e^{\frac{۷\pi}{۵}i}\,,\,۲e^{\frac{۹\pi}{۵}i}$

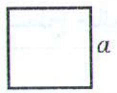
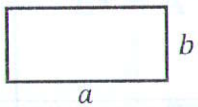
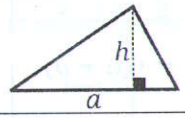
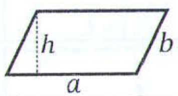
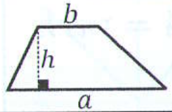
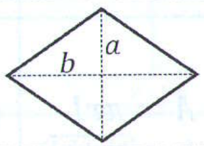
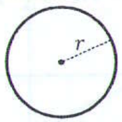
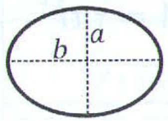
$۷/۶)\ \sqrt[۴]{۲}\,e^{\frac{۵\pi}{۱۲}i}\,,\,\sqrt[۴]{۲}\,e^{\frac{۱۱\pi}{۱۲}i}\,,\,\sqrt[۴]{۲}\,e^{\frac{۱۷\pi}{۱۲}i}\,,\,\sqrt[۴]{۲}\,e^{\frac{۲۳\pi}{۱۲}i}$

$۷/۷)\ \sqrt[۶]{۲}\,e^{\frac{۲\pi}{۹}i}\,,\,\sqrt[۶]{۲}\,e^{\frac{۵\pi}{۹}i}\,,\,\sqrt[۶]{۲}\,e^{\frac{۸\pi}{۹}i}\,,\,\sqrt[۶]{۲}\,e^{\frac{۱۱\pi}{۹}i}\,,\,\sqrt[۶]{۲}\,e^{\frac{۱۴\pi}{۹}i}\,,\,\sqrt[۶]{۲}\,e^{\frac{۱۷\pi}{۹}i}$

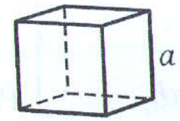
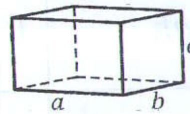
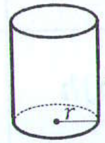
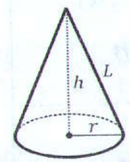
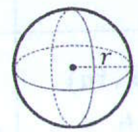
$۷/۸)\ e^{\frac{\pi}{۱۲}i}\,,\,e^{\frac{۵\pi}{۱۲}i}\,,\,e^{\frac{۹\pi}{۱۲}i}\,,\,e^{\frac{۱۳\pi}{۱۲}i}\,,\,e^{\frac{۱۷\pi}{۱۲}i}\,,\,e^{\frac{۲۱\pi}{۱۲}i}$

پیوست‌ها

« فرمول‌های محیط و مساحت اشکال مهم هندسی »

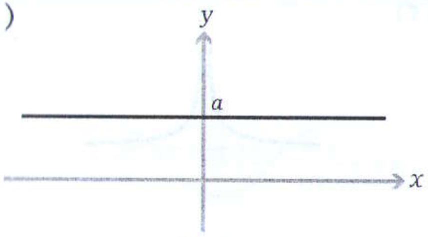
مساحت	محیط	شکل	نام
$S=a^{۲}$	$P=۴a$		مربع
$S=ab$	$P=۲(a+b)$		مستطیل
$S=\frac{۱}{۲}ah$	$P=$ مجموع اضلاع		مثلث
$S=ah$	$P=۲(a+b)$		متوازی‌الاضلاع
$S=\frac{۱}{۲}(a+b)h$	$P=$ مجموع اضلاع		ذوزنقه
(a و b دو قطر لوزی) $S=\frac{۱}{۲}ab$	$P=۲\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}$		لوزی
$S=\pi r^{۲}$	$P=۲\pi r$		دایره
($۲a$ و $۲b$ دو قطر بیضی) $S=\pi ab$	فرمول دقیق موجود نیست $P\cong\pi\sqrt{۲(a^{۲}+b^{۲})}$		بیضی

« فرمول‌های سطح و حجم اشکال مهم هندسی »

نام	شکل	سطح کل	سطح جانبی	حجم
مکعب		$S = ۶a^۲$	$A = ۴a^۲$	$V = a^۳$
مکعب مستطیل		$S = ۲(ab + ac + bc)$	$A = ۲(a+b)c$	$V = abc$
استوانه قائم		$S = ۲\pi(rh + r^۲)$	$A = ۲\pi rh$	$V = \pi r^۲ h$
مخروط دوار		$S = \pi rL + \pi r^۲$	$A = \pi rL$ $(L = \sqrt{h^۲ + r^۲})$	$V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$
کره		$S = ۴\pi r^۲$	$A = ۴\pi r^۲$	$V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳$

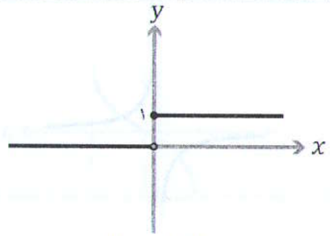
« نمودارهای مهم »

۱)



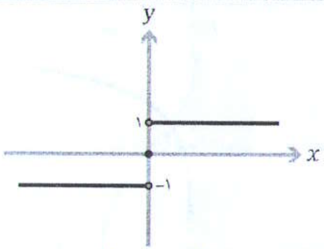
$y = a$

۲)



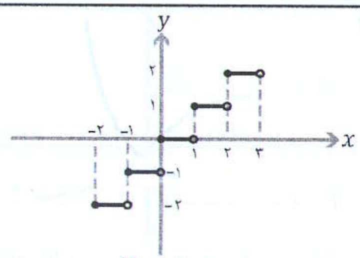
$y = u(x)$

۳)



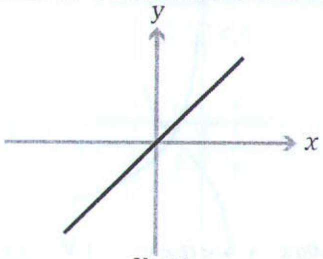
$y = sgn\, x$

۴)



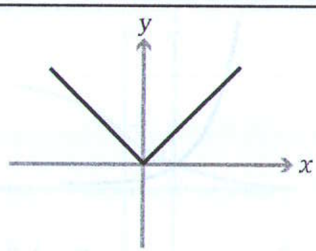
$y = [x]$

۵)



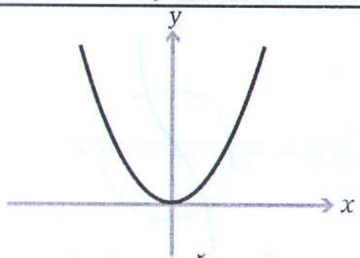
$y = x$

۶)



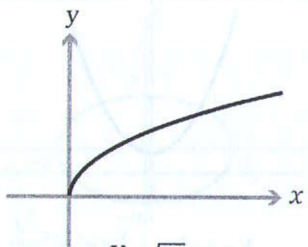
$y = |x|$

۷)

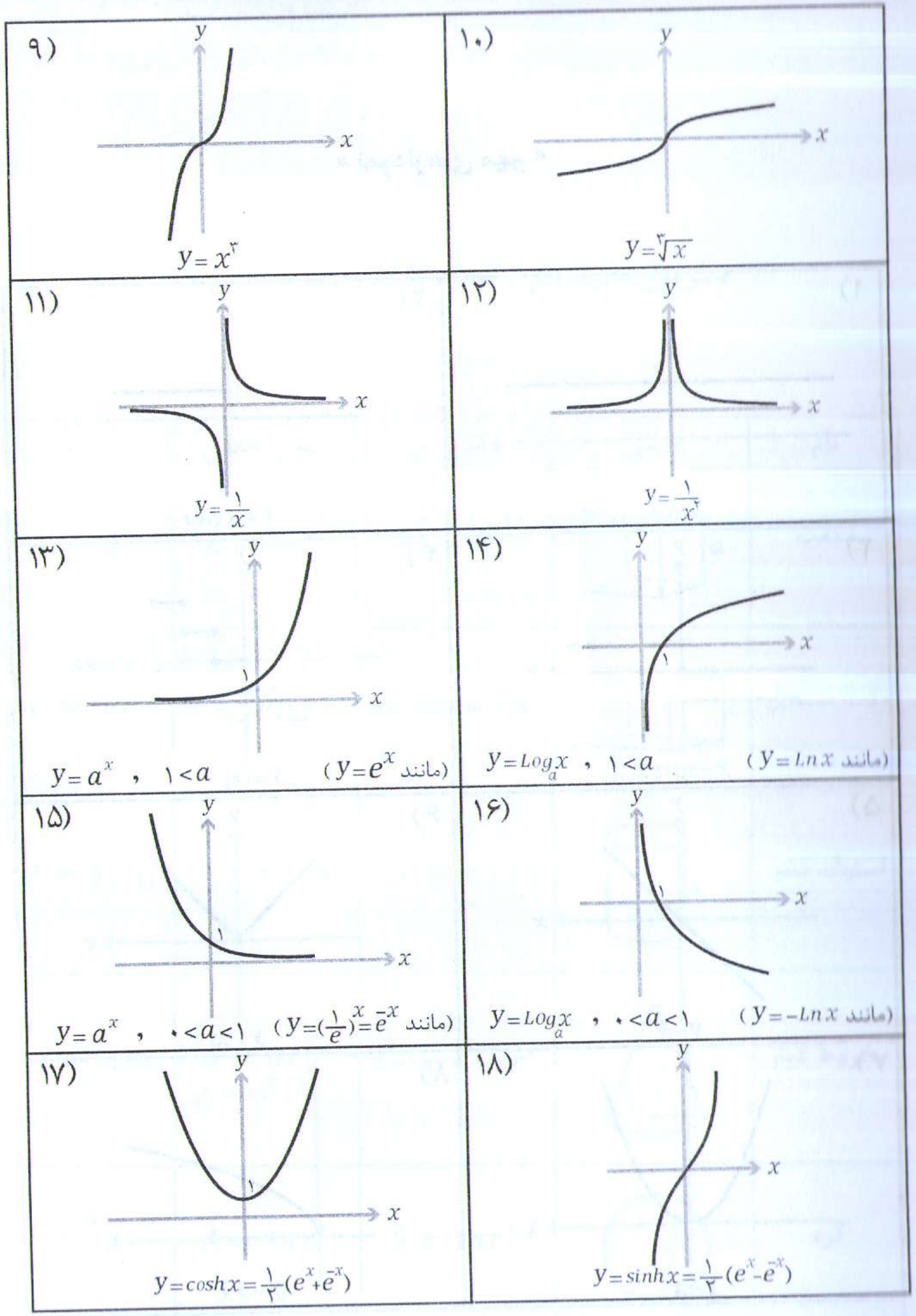


$y = x^۲$

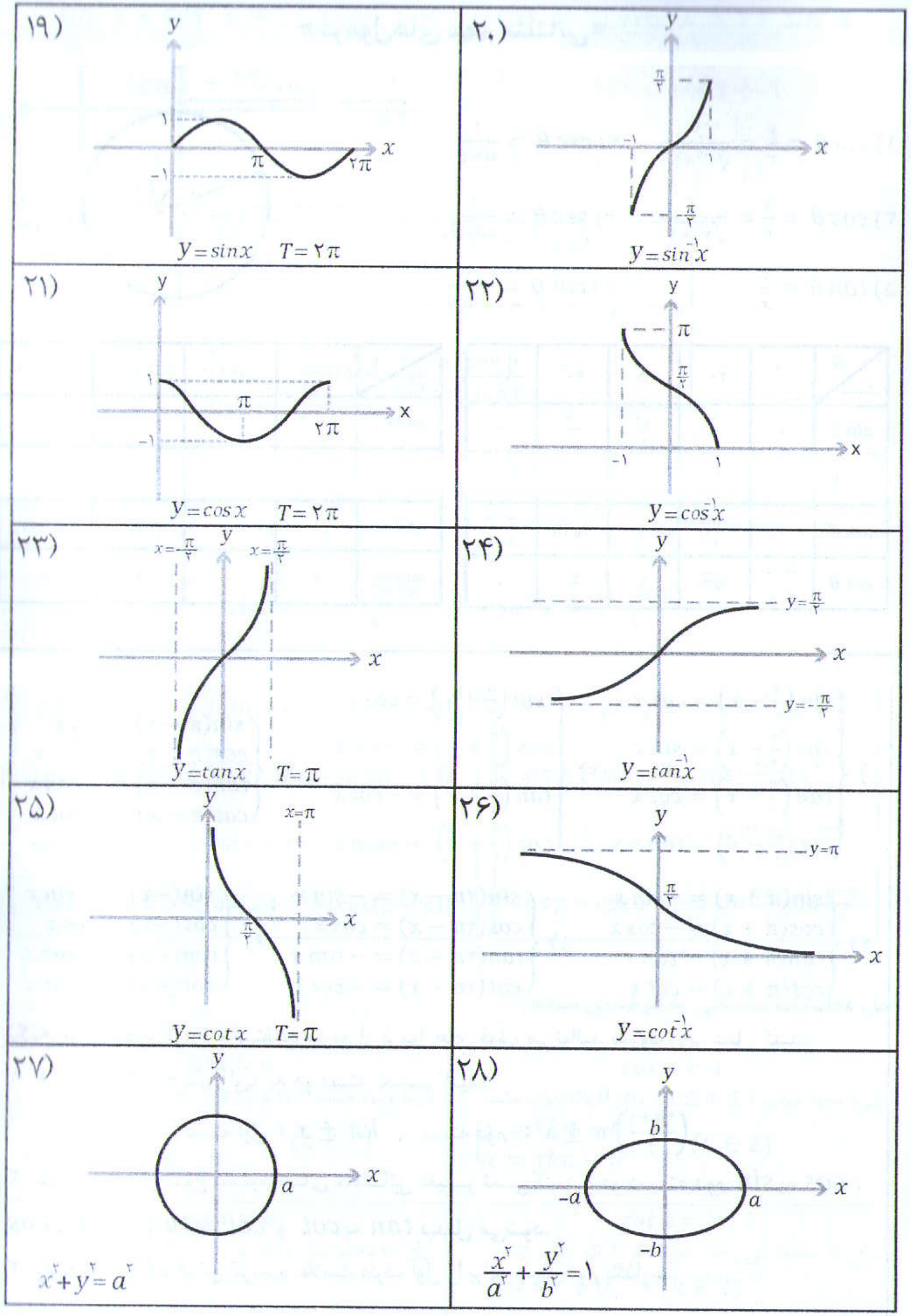
۸)



$y = \sqrt{x}$

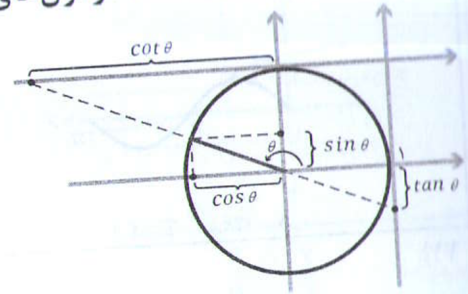


۹)
$y = x^{۳}$
۱۰)
$y = \sqrt[۳]{x}$
۱۱)
$y = \frac{۱}{x}$
۱۲)
$y = \frac{۱}{x^{۲}}$
۱۳)
$y = a^{x}$, $۱ < a$ ($y = e^{x}$ مانند)
۱۴)
$y = Log_{a} x$, $۱ < a$ ($y = Ln\, x$ مانند)
۱۵)
$y = a^{x}$, $۰ < a < ۱$ ($y = (\frac{۱}{e})^{x} = e^{-x}$ مانند)
۱۶)
$y = Log_{a} x$, $۰ < a < ۱$ ($y = -Ln\, x$ مانند)
۱۷)
$y = cosh x = \frac{۱}{۲}(e^{x} + e^{-x})$
۱۸)
$y = sinh x = \frac{۱}{۲}(e^{x} - e^{-x})$



۱۹)
$y = sin x$ $T = ۲\pi$
۲۰)
$y = sin^{-۱} x$
۲۱)
$y = cos x$ $T = ۲\pi$
۲۲)
$y = cos^{-۱} x$
۲۳)
$y = tan x$ $T = \pi$
۲۴)
$y = tan^{-۱} x$
۲۵)
$y = cot x$ $T = \pi$
۲۶)
$y = cot^{-۱} x$
۲۷)
$x^{۲} + y^{۲} = a^{۲}$
۲۸)
$\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}} = ۱$

«فرمول‌های مهم مثلثاتی»



۱) $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ۲) $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

۳) $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ۴) $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

۵) $\tan\theta = \frac{y}{x}$ ۶) $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

نسبت \ θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده
$\cot\theta$	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

نسبت \ θ	$0^\circ<\theta<90^\circ$	$90^\circ<\theta<180^\circ$	$180^\circ<\theta<270^\circ$	$270^\circ<\theta<360^\circ$
$\sin\theta=\frac{y}{r}$	+	+	−	−
$\cos\theta=\frac{x}{r}$	+	−	−	+
$\tan\theta=\frac{y}{x}$	+	−	+	−
$\cot\theta=\frac{x}{y}$	+	−	+	−

۱) $\begin{cases}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x\\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cot x\\ \cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\tan x\end{cases}$

۲) $\begin{cases}\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x\\ \tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cot x\\ \cot\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\tan x\end{cases}$

۳) $\begin{cases}\sin(\pi-x)=\sin x\\ \cos(\pi-x)=-\cos x\\ \tan(\pi-x)=-\tan x\\ \cot(\pi-x)=-\cot x\end{cases}$

۴) $\begin{cases}\sin(\pi+x)=-\sin x\\ \cos(\pi+x)=-\cos x\\ \tan(\pi+x)=\tan x\\ \cot(\pi+x)=\cot x\end{cases}$

۵) $\begin{cases}\sin(2\pi-x)=-\sin x\\ \cos(2\pi-x)=\cos x\\ \tan(2\pi-x)=-\tan x\\ \cot(2\pi-x)=-\cot x\end{cases}$

۶) $\begin{cases}\sin(-x)=-\sin x\\ \cos(-x)=\cos x\\ \tan(-x)=-\tan x\\ \cot(-x)=-\cot x\end{cases}$

نکته: برای حفظ کردن و استفاده سریع از فرمول‌های فوق، می‌توانید به روش زیر عمل کنید:

۱- فرمول‌ها را بر حسب زاویه به دو دسته تقسیم کنید:

دسته اول : $k\pi \pm x$ ، دسته دوم : $\left(\frac{2k+1}{2}\right)\pi \pm x$

۲- در دسته اول نوع نسبت‌های مثلثاتی تغییر نمی‌کند و در دسته دوم $\sin$ به $\cos$ ، $\cos$ به $\sin$ ، $\tan$ به $\cot$ و $\cot$ به $\tan$ تبدیل می‌شود.

۳- زاویه x را حاده فرض کرده و علامت طرف اول را برای طرف دوم بگذارید.

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $\tan x \cot x = 1$

$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$, $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \csc^2 x$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(a\pm b) &= \sin a\cos b \pm \cos a \sin b\\ \cos(a\pm b) &= \cos a\cos b \mp \sin a\sin b\\ \tan(a\pm b) &= \frac{\tan a \pm \tan b}{1\mp \tan a\tan b}\end{aligned}}$$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$, $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$

$\cos a\sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)]$

$\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$

$\sin a\sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$

$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

حل معادلات مثلثاتی به فرم‌های ساده :

$\sin x = a$ شرط وجود جواب: $-1 \le a \le 1$ ، اگر θ یک جواب باشد: $\begin{cases}x = 2k\pi+\theta\\ x = 2k\pi+\pi-\theta\end{cases} \quad (k\in\mathbb{Z})$	**$\cos x = a$** شرط وجود جواب: $-1 \le a \le 1$ ، اگر θ یک جواب باشد: $\begin{cases}x = 2k\pi+\theta\\ x = 2k\pi-\theta\end{cases} \quad (k\in\mathbb{Z})$
$\tan x = a$ برای a محدودیتی وجود ندارد. اگر θ یک جواب باشد: $x = k\pi+\theta \quad (k\in\mathbb{Z})$	**$\cot x = a$** برای a محدودیتی وجود ندارد. اگر θ یک جواب باشد: $x = k\pi+\theta \quad (k\in\mathbb{Z})$

«فرمول‌های مهم مشتق‌گیری»

۱) $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (تعریف مشتق)

۲) $f(x) = c \to f'(x) = 0$

با فرض اینکه u و v توابعی مشتق‌پذیر از x باشند، داریم:

۳) $(cu)' = cu'$ ۴) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

۵) $(uv)' = u'v + uv'$ ۶) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

۷) $y = f(u) \to \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{df(u)}{du}\dfrac{du}{dx} = f'(u)\,u'$ (مشتق تابع مرکب)

۸) $(x^n)' = nx^{n-1} \to (u^n)' = nu'u^{n-1}$

۹) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \to (\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

۱۰) $(\sqrt[m]{x^n})' = \dfrac{n}{m\sqrt[m]{x^{m-n}}} \to (\sqrt[m]{u^n})' = \dfrac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$

۱۱) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2} \to \left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

۱۲) $(\sin x)' = \cos x \to (\sin u)' = u'\cos u$

۱۳) $(\cos x)' = -\sin x \to (\cos u)' = -u'\sin u$

۱۴) $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x \to (\tan u)' = u'(1 + \tan^2 u)$

۱۵) $(\cot x)' = -(1 + \cot^2 x) \to (\cot u)' = -u'(1 + \cot^2 u)$

۱۶) $(\sec x)' = \sec x \tan x \to (\sec u)' = u'\sec u \tan u$

۱۷) $(\csc x)' = -\csc x \cot x \to (\csc u)' = -u'\csc u \cot u$

۱۸) $(\sin^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \to (\sin^{-1} u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

۱۹) $(\cos^{-1} x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \to (\cos^{-1} u)' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

۲۰) $(\tan^{-1} x)' = \dfrac{1}{1+x^2} \to (\tan^{-1} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

۲۱) $(\cot^{-1} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2} \to (\cot^{-1} u)' = \dfrac{-u'}{1+u^2}$

۲۲) $(\sec^{-1} x)' = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \to (\sec^{-1} u)' = \dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$

۲۳) $(\csc^{-1} x)' = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \to (\csc^{-1} u)' = \dfrac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$

۲۴) $(a^x)' = (\ln a)a^x \to (a^u)' = u'(\ln a)a^u$ $(a \neq 1$ و $a > 0)$

۲۵) $(e^x)' = e^x \to (e^u)' = u'e^u$

۲۶) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{(\ln a)x} \to (\log_a u)' = \dfrac{u'}{(\ln a)u}$ $(a \neq 1$ و $a > 0)$

۲۷) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} \to (\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

۲۸) $(\sinh x)' = \cosh x \to (\sinh u)' = u'\cosh u$

۲۹) $(\cosh x)' = \sinh x \to (\cosh u)' = u'\sinh u$

۳۰) $(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x \to (\tanh u)' = u'(1 - \tanh^2 u)$

۳۱) $(\coth x)' = 1 - \coth^2 x \to (\coth u)' = u'(1 - \coth^2 u)$

۳۲) $F(x,y) = 0 \to \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x}{F_y}$ (مشتق‌گیری ضمنی)

۳۳) $\big(x = f(t), y = g(t)\big) \to \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$ (مشتق‌گیری پارامتری)

۳۴) $y = u^v \to \ln y = v\ln u \to y' = u^v\left(v'\ln u + \dfrac{u'}{u}v\right)$ (مثال برای مشتق‌گیری لگاریتمی)

« فرمول‌های مهم انتگرال‌گیری »

۱) $\int dx = x + c$

۲) $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx \quad (a \in \mathbb{R})$

۳) $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

۴) $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \quad n \neq -1$

۵) $\int \frac{1}{x}\,dx = Ln|x| + c$

۶) $\int e^x\,dx = e^x + c$

۷) $\int a^x\,dx = \frac{1}{Ln\,a}a^x + c$

۸) $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

۹) $\int \sin ax\,dx = \frac{-1}{a}\cos ax + c$

۱۰) $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

۱۱) $\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + c$

۱۲) $\int \sin^2 x\,dx = \frac{2x - \sin 2x}{4} + c$

۱۳) $\int \cos^2 x\,dx = \frac{2x + \sin 2x}{4} + c$

۱۴) $\int \tan x\,dx = -Ln|\cos x| + c = Ln|\sec x| + c$

۱۵) $\int \cot x\,dx = Ln|\sin x| + c = -Ln|\csc x| + c$

۱۶) $\int \sec x\,dx = Ln|\sec x + \tan x| + c$

۱۷) $\int \csc x\,dx = Ln|\csc x - \cot x| + c$

۱۸) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$

۱۹) $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + c$

۲۰) $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$

۲۱) $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + c$

۲۲) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1}x + c$

۲۳) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}(\frac{x}{a}) + c$

۲۴) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}x + c$

۲۵) $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}(\frac{x}{a}) + c$

۲۶) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1}|x| + c$

۲۷) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + c$

۲۸) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\sin^{-1}(\frac{x}{a}) + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + c$

۲۹) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = Ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + c$

۳۰) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = Ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + c$

۳۱) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x} + c$

۳۲) $\int \sinh x\,dx = \cosh x + c$

۳۳) $\int \cosh x\,dx = \sinh x + c$

۳۴) $\int (1 - \tanh^2 x)\,dx = \tanh x + c$

۳۵) $\int (1 - \coth^2 x)\,dx = \coth x + c$

۳۶) $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (انتگرال‌گیری به روش جزءبه‌جزء)

۳۷) $\int x \sin x\,dx = -x\cos x + \sin x + c$

۳۸) $\int x \cos x\,dx = x\sin x + \cos x + c$

۳۹) $\int x\,Ln\,x\,dx = \frac{1}{4}x^2(2Ln\,x - 1) + c$

۴۰) $\int Ln\,x\,dx = x(Ln\,x - 1) + c$

۴۱) $\int \tan^{-1}x\,dx = x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}Ln|1 + x^2| + c$

۴۲) $\int x e^x\,dx = (x-1)e^x + c$

۴۳) $\int x^2 e^x\,dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + c$

« خواص لگاریتم طبیعی »

۱) $Log_e x = Ln\,x \quad (x > 0)$

۲) $Ln\,e = 1\ ,\ Ln 1 = 0$

۳) $Ln\,xy = Ln\,x + Ln\,y$

۴) $Ln\frac{x}{y} = Ln\,x - Ln\,y$

۵) $Ln\,x^n = n\,Ln\,x \quad (n \in \mathbb{R})$

۶) $Log_b\,a = \frac{Ln\,a}{Ln\,b}$

۷) $e^{Ln\,x} = x$

۸) $a^x = e^{xLna}$

۹) $(Ln\,x)' = \frac{1}{x}$

۱۰) $\int \frac{1}{x}dx = Ln\,|x| + c$